

Tempi di Tunnelling (Tunneling Times)^(*)

Giuseppe PRIVITERA

Dipartimento di Fisica, Università di Catania, Catania, Italia

Erasmus RECAMI and Vladislav S. OLKHOVSKY^(a)

Facoltà di Ingegneria, Università statale di Bergamo, Bergamo, Italia;

I.N.F.N., Sezione di Milano, Milano, Italia; and

DMO/FEEC and C.C.S., Università Statale di Campinas, S.P., Brasile.

^(a) *Institute for Nuclear Research, Ukrainian Academy of Sciences, Kiev.*

ABSTRACT – In this paper (in Italian) we critically and detaily examine various definitions existing in the literature for the tunnelling times: namely, the phase-time; the centroid-based times; the Büttiker and Landauer times; the Larmor times; the complex (path-integral and Bohm) times; the dwell time, and the generalized (Olkhovsky and Recami) dwell time, with some numerical evaluations. Then, we pass to examine the equivalence between quantum tunnelling and “photon tunnelling” (evanescent waves propagation), with particular attention to tunnellings with Superluminal group-velocities (“Hartman effect”). At last, the main (Cologne, Berkeley, Florence, Vienna) experimental data about Superluminal evanescent wave propagation are briefly reviewed.

Parte I: TEORIA

I.0) Introduzione.

Consideriamo una particella inizialmente libera che, durante il proprio moto, vada ad incidere su una barriera di potenziale di energia maggiore della propria.

Come sappiamo la meccanica quantistica prevede che vi sia una probabilità non nulla che la particella possa attraversare la barriera (*effetto tunnel*). È dunque lecito chiedersi se sia possibile associare un tempo, e quindi una velocità, al processo di attraversamento della barriera e, in tal caso, come sia possibile calcolare e misurare sperimentalmente queste quantità.

Potrebbe sorprendere che una domanda apparentemente così semplice e di fondamentale importanza nella comprensione di qualunque teoria dello scattering, e non solo, non abbia ancora

^{0(*)} Lavoro in parte finanziato da INFN, MURST, CNR (Italia), da CAPES, CNPq (Brasile), e dall’ I.N.R. (Accademia Ucraina delle Scienze, Kiev).

ricevuto una adeguata risposta.

Il problema venne posto per la prima volta nel 1931 da Condon,[1] ed un primo tentativo di risposta risale all'anno successivo da parte di McColl.[2] Da allora, però, l'argomento rimase quasi ignorato fino agli anni quaranta e cinquanta, con il tentativo di introdurre una osservabile quantomeccanica per la variabile tempo, soprattutto nella trattazione delle collisioni [per una semplice introduzione in M.Q. di un operatore (non autoaggiunto ma) hermitiano per l'osservabile Tempo, si vedano le refs.[3].]

L'avvento di dispositivi elettronici ad alta velocità, basati su processi di tunnelling, e l'importanza del fenomeno in processi di fissione e fusione nucleare sotto soglia, hanno però suscitato, soprattutto negli ultimi quindici anni, un crescente interesse verso l'argomento, tanto da portare, dal 1987 ad oggi, alla pubblicazione di parecchie (almeno una decina[4 – 6]) reviews teoriche al riguardo.

Sperimentalmente, invece, le difficoltà nell'effettuare misure non invasive con particelle quali ad esempio elettroni, hanno reso molto difficile una verifica dei risultati teorici. Solo negli ultimi anni, sfruttando l'equivalenza tra trasmissione di onde elettromagnetiche evanescenti[7] e tunnelling di particelle, sono state realizzate alcune misure dei tempi di trasmissione di microonde e di fotoni. Ci occuperemo in seguito, quando prenderemo in esame tali esperimenti, della suddetta equivalenza.

Poiché effetti di tunnelling possono intervenire in vari processi fisici (I.teoria dello scattering, diseccitazione di stati metastabili, fissione e fusione sottosoglia, etc.) premettiamo che noi esamineremo solo il caso unidimensionale di attraversamento, da parte di una particella inizialmente libera, di una barriera di potenziale costante^{#1} V_0 , che si estenda nell'intervallo $[0, d]$, (vedi Fig.I-1); caso peraltro equivalente alle configurazioni degli apparati sperimentali finora adottati.

Malgrado la gran mole di lavori teorici cui accennavamo, non esiste ancora un approccio al problema che venga universalmente accettato; noi li raggrupperemo in quattro categorie principali.

Alla prima categoria appartengono tutti quei tempi costruiti “seguendo” il pacchetto incidente durante l'attraversamento della barriera.

Figura I-1.

Scelta una data caratteristica del pacchetto, per esempio il picco centrale, si confrontano il picco entrante e quello uscente in modo da ricavarne una relazione temporale. Oltre

^{#1} Solo in un caso, quello del *tempo di Büttiker-Landauer*, la barriera sarà anche funzione del tempo.

al picco sono stati presi in considerazione dai vari autori anche il centroide (centro di “massa” del pacchetto) e il fronte d’onda, molto netto, di un’onda a scalino.

Tra le critiche più comunemente avanzate verso questo tipo di approccio, vi è il fatto che, secondo molti, il picco uscente non corrisponderebbe sempre a quello entrante a causa della presenza, tra le componenti di Fourier del pacchetto, di frequenze corrispondenti ad energie prossime o al di sopra dell’energia di barriera. Tali frequenze raggiungerebbero prima delle altre la barriera venendo da questa trasmesse più efficientemente di quelle più basse. Tutto ciò, oltre a provocare gli usuali effetti di dispersione, eventualmente presenti anche durante la fase di avvicinamento alla barriera, sembra poter avere, in certi casi, un effetto accelerante sul pacchetto o, addirittura, portare alla sua trasmissione prima ancora che il picco principale la abbia raggiunta.

A questa categoria di tempi appartiene il *phase time*. Questo viene ricavato mediante l’approssimazione della fase stazionaria utilizzando la definizione di velocità di gruppo del pacchetto e, malgrado le suddette critiche, risulta quello maggiormente in accordo con i dati sperimentali finora a disposizione.

Un secondo tipo di approccio consiste nell’introduzione di qualche grado di libertà nel sistema particella-barriera, per definire un “orologio” che dia una misura del tempo trascorso dalla particella all’interno della barriera. Attraverso l’effetto dell’orologio sulla particella o, viceversa, attraverso l’effetto della barriera su un orologio associato alla particella, si risale al loro tempo di interazione durante l’attraversamento.

Büttiker e Landauer, ad esempio, tentano di risalire al tempo di tunnelling calcolando lo scambio di quanti di energia da parte di una particella che attraversi una barriera rettangolare la cui altezza sia modulata nel tempo (*tempo di Büttiker-Landauer*).

Un altro esempio può essere la misura della rotazione dello spin di un elettrone quando nella porzione di spazio occupata dalla barriera si trovi un campo magnetico uniforme (*tempi di Larmor*).

Questo tipo di approccio consente una larga scelta nei gradi di libertà del sistema che possono essere usati come orologio e, contemporaneamente, fornisce anche dei metodi sperimentali per la verifica dei risultati teorici. Viene però criticato da alcuni autori, sia perché non tutti i tipi di orologio risultano equivalenti, sia soprattutto perché l’introduzione di tali tipi di orologi, oltre a modificare il numero di gradi di libertà del sistema, introduce comunque dei processi invasivi, i quali condizionerebbero i risultati. Praticamente niente ci assicura che il tempo di interazione, in cui comunque lo stato del sistema subisce una perturbazione, corrisponda proprio al tempo di attraversamento o di riflessione.

Il terzo tipo di approccio al problema consiste nell’attribuire al moto della particella sotto barriera un insieme di traiettorie “semiclassiche”. Con queste viene poi calcolato un tempo medio di tunnelling.

I cammini possono essere costruiti con vari metodi, per esempio attraverso i *path-integrals* di Feynman, il metodo di Bohm, o l'uso della distribuzione di Wigner: tutti e tre i metodi portano, naturalmente ad una distribuzione di tempi.

Uno degli inconvenienti di questo tipo di approccio è quello di fornire dei risultati complessi. Tuttavia è possibile estrarre da questi delle quantità reali (il modulo, la parte reale e la parte immaginaria) che, in certi casi, risultano essere strettamente connesse con i tempi definiti mediante altri approcci. Proprio per questo motivo l'interpretazione fisica di tali risultati appare comunque molto interessante.

L'ultima categoria di tempi di tunnelling che esamineremo è quella che parte dalla definizione di *dwell time* o tempo di soggiorno. Quest'ultimo viene definito come:

$$\tau^D(x_1, x_2; k) = j^{-1} \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x, k)|^2 dx, \quad (I.0.0)$$

e rappresenta il tempo speso da una particella all'interno della barriera, o di una qualunque regione di spazio, calcolato come rapporto tra densità di probabilità che la particella si trovi in quella regione ed il flusso j_{in} in essa entrante.

Il problema di tale definizione è che questa ci fornisce sì il tempo di soggiorno all'interno della barriera, ma senza distinguere tra canale di trasmissione e canale di riflessione. A tal proposito, una relazione, spesso considerata ovvia ma non universalmente accettata, che dovrebbe legare i tempi corrispondenti ai due canali è:

$$\tau_D = |T(k)|^2 \tau_T + |R(k)|^2 \tau_R. \quad (I.0.1)$$

Questa relazione, se pure fosse corretta, sembra non bastare da sola ad individuare univocamente τ_T e τ_R .

Le critiche a tale relazione, ed i tentativi di alcuni autori di trovare una relazione equivalente che leghi il tempo trascorso all'interno della barriera con i tempi di riflessione e di attraversamento, portano ai cosiddetti approcci spaziali. Questi vengono costruiti attraverso l'interpretazione probabilistica standard, in meccanica quantistica, delle densità di corrente relative a trasmissione e riflessione.

Notiamo infine che alcuni dei tempi che descriveremo, potrebbero sembrare dei candidati migliori di altri a rappresentare il tempo di tunnelling. Ciò sia perché non presentano il comparire dell'*effetto Hartman*, sia perché in accordo con la (I.0.1). Tuttavia proprio questi tempi risultano, invece, maggiormente in disaccordo con i dati sperimentali.

I.1) Premesse e notazioni.

Prima di andare a descrivere i più importanti tipi di tempi ed i relativi risultati premettiamo alcune considerazioni e notazioni.

Supporremo di aver già risolto in modo esatto il caso stazionario. Per ogni energia fissata, $E = \hbar^2 k^2 / 2m$, sarà allora:

$$\psi(x; k) = \begin{cases} \psi_{\text{I}} = e^{ikx} + R(k)e^{-i(kx-\beta)} & x \leq 0 \\ \psi_{\text{II}} = \chi(x; k) & 0 \leq x \leq d \\ \psi_{\text{III}} = T(k)e^{i(kx+\alpha)} & x \geq d \end{cases} \quad (I.1.0)$$

con $R(k)$ e $T(k)$ ampiezze, rispettivamente, di riflessione e di trasmissione, tali che:

$$R(k) = \sqrt{1 - T(k)^2},$$

e $\beta = \beta(k)$, $\alpha = \alpha(k)$, corrispondenti ritardi di fase.

Nel caso particolare di una barriera rettangolare:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & 0 \leq x \leq d \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

$\chi(x; k)$, $R(k)$, $T(k)$, $\alpha(k)$, $\beta(k)$, sono tutte quantità la cui forma analitica è ben conosciuta; avremo dunque:

$$\chi(x; k) = \begin{cases} A(k)e^{-\kappa x} + B(k)e^{\kappa x} & E < V_0 \\ A(k)e^{-i\kappa x} + B(k)e^{i\kappa x} & E > V_0 \end{cases}, \quad (I.1.1)$$

con

$$\kappa = \begin{cases} \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar, & E < V_0 \\ \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar, & E > V_0 \end{cases}$$

$$R(k) = \begin{cases} \frac{(k^2 - \kappa^2) \sinh(\kappa d)}{[4k^2\kappa^2 + (k^2 + \kappa^2)^2 \sinh^2(\kappa d)]^{\frac{1}{2}}} & E < V_0 \\ \frac{(k^2 + \kappa^2) \sin(\kappa d)}{[4k^2\kappa^2 + (k^2 - \kappa^2)^2 \sin^2(\kappa d)]^{\frac{1}{2}}} & E > V_0 \end{cases} \quad (I.1.2)$$

$$T(k) = \begin{cases} \frac{2k\kappa}{[4k^2\kappa^2 + (k^2 + \kappa^2)^2 \sinh^2(\kappa d)]^{\frac{1}{2}}} & E < V_0 \\ \frac{2k\kappa}{[4k^2\kappa^2 + (k^2 - \kappa^2)^2 \sin^2(\kappa d)]^{\frac{1}{2}}} & E > V_0 \end{cases} \quad (I.1.3)$$

$$\beta(k) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{-2k\kappa}{(k^2 - \kappa^2)} \coth(\kappa d)\right), & E < V_0 \\ \arctan\left(\frac{-2k\kappa}{(k^2 + \kappa^2)} \cot(\kappa d)\right), & E > V_0 \end{cases} \quad (I.1.4)$$

$$\alpha(k) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{(k^2 - \kappa^2)}{2k\kappa} \tanh(\kappa d)\right), & E < V_0 \\ \arctan\left(\frac{(k^2 + \kappa^2)}{2k\kappa} \tan(\kappa d)\right), & E > V_0 \end{cases} \quad (I.1.5)$$

Naturalmente in seguito non avremo a che fare con semplici onde stazionarie ma con pacchetti d'onda della forma:

$$\Psi(x; t) = \int dk C f(k - k_0) \psi(x; k) e^{-i \frac{E(k)t}{\hbar}} =$$

$$= \int dE g(E - E_0) \psi(x; k(E)) e^{-i \frac{Et}{\hbar}}. \quad (I.1.6)$$

Saranno inoltre:

$$\rho = |\psi(x)|^2, \quad j = \text{Re} \left\{ \frac{i\hbar}{2m} \psi(x) \frac{\partial}{\partial x} \psi^*(x) \right\}. \quad (I.1.7)$$

Nel caso elettromagnetico (microonde e fotoni), che noi supporremo sempre T.E. o T.M., ψ rappresenterà la parte scalare di una delle due componenti del campo.

Definiamo infine *tempo equivalente*, τ_{eq}^T , il tempo che la particella impiegherebbe ad attraversare lo spazio occupato dalla barriera, ma in sua assenza; sarà dunque $\tau_{\text{eq}}^T = md/\hbar k$. Prendiamo ora in rassegna le definizioni di alcuni dei tempi cui abbiamo accennato.

I.2) Phase Time.

Supponiamo di avere un pacchetto d'onda molto stretto intorno ad un numero d'onda k_0 . La descrizione della sua evoluzione temporale è in genere molto complicata a causa, spesso, della propria natura dispersiva. In ogni caso, sotto opportune condizioni, è possibile seguire la posizione del picco di un pacchetto simmetrico con buona precisione, trascurando tali effetti[8]. Possiamo quindi provare ad identificare il pacchetto prendendo come riferimento il picco: per far ciò usiamo il metodo della fase stazionaria.

Il picco del pacchetto sarà formato da quelle componenti di Fourier per cui la variazione di fase in un intorno di k_0 sia abbastanza ridotta in modo da non interferire distruttivamente. Analogamente il pacchetto trasmesso sarà descritto da una funzione d'onda anch'essa dominata da una piccola serie di frequenze ciascuna della forma:

$$\psi(x; k) \sim e^{i(kx - \frac{E(k)t}{\hbar} + \alpha(k))}.$$

Se vogliamo seguire la posizione del picco, dobbiamo vedere per quali valori di $x_p(t)$ la fase è stazionaria, cioè, l'argomento dell'esponenziale è massimo.^{#2} . Deve quindi essere:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} \left(kx_p(t) - \frac{E(k)t}{\hbar} + \alpha(k) \right) &= 0 \\ \Rightarrow x_p(t) &= \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk} t - \frac{d\alpha}{dk} \end{aligned} \quad (I.2.0)$$

Allora $\alpha'(k_0) = (d\alpha/dk)_{k_0}$ rappresenterà il ritardo spaziale δx causato dal processo di tunnelling e, dividendo per v_g (velocità di gruppo del pacchetto d'onda) otteniamo un ritardo temporale:

$$\delta\tau_T = \frac{\delta x}{v_g} = (v_g)^{-1} \frac{d\alpha}{dk} = \left(\frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk} \right)^{-1} \frac{d\alpha}{dk} = \hbar \frac{d\alpha}{dE}. \quad (I.2.1)$$

^{#2} Applicando lo stesso ragionamento alla parte incidente otterremmo: $x_p(t) = \frac{1}{\hbar} \left(\frac{dE}{dk} \right) t = \left(\frac{d\omega}{dk} \right) t$, dove $(d\omega/dk)$ è proprio, per sua definizione, la velocità di gruppo del pacchetto incidente. Notiamo inoltre che, naturalmente, $v_g = (d\omega/dk)$ dipenderà dalla relazione di dispersione $\omega(k)$ del mezzo in cui il pacchetto si propaga.

Figura I-2.

Notiamo che stiamo calcolando sia v_g che tutte le altre quantità in $k = k_0$. Vedremo più avanti se e quando ciò possa considerarsi corretto.

Per motivi che spiegheremo tra poco definiamo *phase time* il tempo totale $\tau_T^\varphi(x_1, x_2; k)$, speso da una particella tra due punti, x_1 e x_2 , esterni alla barriera e abbastanza lontani da essa, cioè: $x_1 \ll 0$ e $x_2 \gg d$. Avremo allora:

$$\tau_T^\varphi(x_1, x_2; k) = \frac{1}{v_g}(x_2 - x_1 + \alpha'(k)) \quad (I.2.2)$$

ed applicando lo stesso tipo di ragionamento alle particelle riflesse:

$$\tau_R^\varphi(x_1, x_2; k) = \frac{1}{v_g}(-2x_1 + \beta'(k)) \quad (I.2.3)$$

Poiché sia τ_T^φ che τ_R^φ dipendono linearmente da x_1 e x_2 , potremmo pensare di estrapolare i tempi di attraversamento e di riflessione direttamente facendo tendere x_1 e x_2 rispettivamente a 0 e d : ciò però non è corretto.

Avendo infatti supposto le componenti del pacchetto strettamente distribuite intorno ad un numero d'onda k_0 , se $\Delta k = \sigma$, nello spazio ordinario avremo un pacchetto la cui larghezza sarà dell'ordine di σ^{-1} e, quindi, tanto più esteso quanto più esso sarà piccato intorno a k_0 . Dunque la parte incidente e quella riflessa della funzione d'onda potranno interferire tra loro anche ad una certa distanza ($\sim \sigma^{-1}$) dalla barriera (vedi Fig.I-2). Del resto, visto che stiamo usando un'approssimazione stazionaria, non stiamo seguendo realmente il pacchetto nella sua evoluzione temporale ma, semplicemente, osservando asintoticamente il ritardo di fase corrispondente al numero d'onda k_0 .

Definiamo comunque ugualmente:

$$\Delta\tau_T^\varphi = \frac{1}{v_g}(d + \alpha'(k)), \quad (I.2.4)$$

$$\Delta\tau_R^\varphi = \frac{1}{v_g}(\beta'(k)), \quad (I.2.5)$$

che chiameremo *tempi di fase estrapolati*. In seguito, però, dobbiamo tenere sempre presente il carattere puramente asintotico di tali definizioni.

Nel caso di barriera rettangolare abbiamo:

$$\Delta\tau_T^\varphi(0, d; k) = \Delta\tau_R^\varphi(0, d; k) =$$

$$= \frac{m}{\hbar k \kappa} \left(\frac{2\kappa d k^2 (\kappa^2 - k^2) + \varepsilon^4 \sinh(2\kappa d)}{4\kappa^2 k^2 + \varepsilon^4 \sinh^2(\kappa d)} \right), \quad (I.2.6)$$

con $\varepsilon = 2mV_0/\hbar$. All'aumentare di d il termine in parentesi tenderà a due, e quindi $\Delta\tau_T^\varphi$ e $\Delta\tau_R^\varphi$ tenderanno a $2m/\hbar k \kappa = 2/v_g \kappa$: tale valore non dipende affatto dallo spessore della barriera e diminuisce all'aumentare di κ , cioè per energie molto piccole ($k \rightarrow 0$).

Aumentando dunque lo spessore, possiamo trovare delle velocità di tunnelling d/τ_t^φ arbitrariamente grandi: effetto Hartman[8]–Fletcher[9] (o semplicemente effetto Hartman). Tale effetto, per quanto potrebbe sembrare fisicamente inaccettabile, perché in contrasto con la relatività ed il principio di causalità, è stato realmente osservato in tutti gli esperimenti cui abbiamo precedentemente accennato.

Quasi tutti gli autori[10] insistono comunque sul fatto che la violazione del principio di causalità è, in questo caso, solo apparente, e che il comparire di velocità Superluminali nei risultati sperimentali sia in effetti dovuto ad un reshaping^{#3} del pacchetto.

Figura I-3.

Didascalia della Fig.I-3:

{3a) Coefficienti di trasmissione $T(k)$ calcolati per diversi valori dello spessore d di una barriera di potenziale rettangolare di altezza $V_0 = \hbar^2 \varepsilon^2 / 2m$. Nella stessa figura viene inoltre riportato il grafico di $f(k - k_0) = e^{-(k-k_0)^2/2(\Delta k)^2}$, con $k_0 = 0.7\varepsilon$, $\Delta k = 0.1k_0$.

3b) Coefficiente di trasmissione di una barriera di spessore $d = 4/\varepsilon$ fino ad energie corrispondenti a valori di $k/\varepsilon = 5$.}

A questo punto, partendo proprio da un'analisi del *phase time*, può essere interessante una discussione, puramente qualitativa, degli effetti subiti da tutto l'insieme di frequenze costituenti un pacchetto d'onda nell'attraversamento della barriera, per capire se, ed in quali casi, possano effettivamente apparire effetti dovuti al reshaping, e se sia possibile evitarli.

Tale discussione, che non pretende affatto di avere la validità di una dimostrazione, troverà, comunque, conferma nei risultati ottenuti seguendo il centroide o l'evoluzione temporale del pacchetto, e si rende necessaria perché, come $\tau_{T,R}^\varphi$ e $\Delta\tau_{T,R}^\varphi$, quasi tutte le altre definizioni di tempi saranno calcolate in $k = k_0$.

In Fig.I-3a possiamo vedere rappresentati i valori di $T(k)$, calcolati per diversi valori di d in funzione di ε . Nello stesso grafico è riportata la funzione di distribuzione di un pacchetto gaussiano piccato intorno a $k_0 = 0.7\varepsilon$. $f(k - k_0) = e^{-(k-k_0)^2/2(\Delta k)^2}$, con $\Delta k = 0.1k_0$. Naturalmente il peso

^{0#3} Per reshaping del pacchetto intendiamo il fatto che, attraversando la barriera, le sue componenti di energia più bassa sono, in genere, trasmesse meno efficientemente di quelle di energia più alta. Ciò può provocare un cambiamento della forma del pacchetto nello spazio delle k (una sua accelerazione in quello delle x), più o meno evidenti.

di ogni componente di Fourier nel pacchetto trasmesso sarà dato dal prodotto $T(k)f(k - k_0)$.

Per barriere molto sottili ($d\varepsilon \ll 1$) $T(k)$ è quasi costante e molto vicino ad 1, tranne che per valori di k molto piccoli. Purché dunque k_0/ε non sia troppo vicino a 0, la funzione $T(k)f(k - k_0)$ avrà il suo massimo sempre in k_0 ed il pacchetto uscente non presenterà deformazioni.

In questo caso il tempo di trasmissione, calcolato sempre come *phase time*, risulta maggiore del *tempo equivalente* e non ci sono problemi.

Aumentando lo spessore della barriera, questa comincerà a trasmettere sempre “peggio” le componenti del pacchetto di energia più bassa: infatti, per valori di d abbastanza grandi, $T(k)$ rimane molto piccolo tranne quando k/ε si avvicina molto ad 1 dove, invece, cresce molto velocemente.

Proprio per questo motivo, secondo molti autori, il pacchetto subirebbe un’accelerazione in quanto il massimo del pacchetto trasmesso si verrebbe a trovare verso un valore $k'_0 > k_0$. Dunque, secondo questi autori, è come se ad attraversare la barriera fossero solo un sottoinsieme di frequenze, quelle più elevate, propagatesi a velocità maggiore di v_g , anche prima di raggiungere la barriera stessa. In effetti, è difficile che ciò avvenga, e può essere in ogni caso evitato (senza che scompaiano le velocità di gruppo Superluminali). Vediamo come.

Innanzitutto notiamo che la barriera non può avere alcun effetto amplificante su nessuna componente del pacchetto, ma solo fare da filtro per alcune di esse, quindi $T(k)$ è limitata e può salire solo fino ad un valore massimo pari ad uno (come vediamo anche dalle Figg.I-3a e I-3b).

Per $k < \varepsilon$, inoltre, $T(k)$ è strettamente crescente e, nel caso che ci interessa, cioè per barriere abbastanza spesse, $T(k)$ cresce molto velocemente solo per valori di k prossimi ad ε , dove ha un flesso obliquo in cui passa da concava a convessa. Saranno inoltre:

$$\lim_{k \rightarrow \varepsilon} T(k) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2 d^2}{4}}}, \quad (I.2.7)$$

$$\lim_{k \rightarrow \varepsilon} T'(k) = \frac{2d^2\varepsilon(3 + d^2\varepsilon^2)}{3(1 + d^2\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (I.2.8)$$

limiti validi anche per $k > \varepsilon$.

In prossimità di ε sarà quindi:

$$T(k) \simeq \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2 d^2}{4}}} + \frac{2d^2\varepsilon(3 + d^2\varepsilon^2)}{3(1 + d^2\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}(k - \varepsilon) \quad (I.2.9)$$

e dunque, nel punto in cui cresce più velocemente, $T(k)$ cresce non più velocemente di $T'(k)(k - \varepsilon)$.

Per quanto riguarda $f(k - k_0)$ abbiamo invece che:

$$f(k - k_0) = \exp[-(k - k_0)^2/2(\Delta k)^2].$$

L'argomento dell'esponenziale sarà minore di uno per $(k - k_0) < \Delta k$ e maggiore di uno se $(k - k_0) > \Delta k$: nel secondo dei due casi $f(k - k_0)$ decrescerà esponenzialmente con $((k - k_0)/\Delta k)^2$.

Tranne che per barriere troppo sottili, per le quali abbiamo già visto che $T(k) \simeq 1$, ci aspettiamo che, se $(\varepsilon - k_0) \sim \Delta k$, buona parte del tunnelling possa anche essere dovuto alla trasmissione delle frequenze di energia più alta e, quindi, il picco delle k potrebbe effettivamente spostarsi in avanti: sarà però, in ogni caso, $(k'_0 - k_0) \sim \Delta k$.

Diminuendo, invece, l'energia del pacchetto incidente, prendendo cioè dei k_0 minori, il contributo al tunnelling da parte delle energie più alte diminuisce sensibilmente in quanto $f(k - k_0)$ decresce esponenzialmente con $((k - k_0)/\Delta k)^2$: ciò sempre più velocemente man mano che k_0 si allontana da ε .

Affinché sia possibile un reshaping del pacchetto, tale da provocare uno shifting o il formarsi di un secondo picco in avanti, è allora necessario che, in certo intervallo, $T(k)$ cresca molto velocemente, abbastanza più velocemente di quanto decresce $f(k - k_0)$ in quello stesso intervallo.

Per l'esattezza dovrà essere:

$$\frac{d}{dk}[T(k)f(k)] = T'(k)f(k - k_0) + T(k)f'(k - k_0) > 0, \quad (I.2.10)$$

funzione molto difficile da studiare a causa della forma abbastanza complicata di $T'(k)$.

Poiché però $f'(k - k_0) = -\frac{(k - k_0)}{(\Delta k)^2}f(k - k_0)$, ed $f(k - k_0) > 0$ sempre, la condizione (I.2.10) si riduce a:

$$T'(k) - \frac{(k - k_0)}{(\Delta k)^2}T(k) > 0. \quad (I.2.11)$$

Osserviamo allora che, come del resto ci aspettiamo, per $k < k_0$ la (I.2.11) è sempre verificata; per $k > k_0$ invece, affinché il prodotto $T(k)f(k - k_0)$ sia crescente, dovrà essere:

$$T'(k) > T(k)\frac{(k - k_0)}{(\Delta k)^2}. \quad (I.2.12)$$

Ma, come abbiamo già visto, $T'(k)$ è limitata, e per barriere abbastanza spesse ha il suo massimo in $k = \varepsilon$. Quindi, per quanto possa essere piccola $T(k)$, possiamo sempre trovare dei valori di Δk tali che la (I.2.12) non sia più valida e quindi il picco rimanga in k_0 . Ciò anche per barriere molto spesse,^{#4} per le quali però la probabilità di tunnelling diviene infinitesima; basta solo che: 1) k_0 non sia troppo vicino a ε , e 2) la distribuzione delle k sia abbastanza stretta intorno a k_0 .

Figura I-4.

^{0#4} Per $\kappa d = (\varepsilon^2 - k^2)^{1/2}d \gg 1$, si ha $T(\kappa) = T((\varepsilon^2 - k^2)^{1/2}) \sim \frac{4k\kappa}{\varepsilon^2}e^{-\kappa d}$, ma in tal caso è anche $T'(k) \sim e^{-\kappa d}$

Didascalia della Fig.I-4:

{Grafici di $T(k)f(k - k_0)$ per energie al di sotto dell'energia di barriera in funzione del numero d'onda k , per diversi valori di k_0 e diversi valori dello spessore a della barriera ($k_0 = 0.3\varepsilon$, Fig.I-5a; $k_0 = 0.5\varepsilon$, Fig.I-5b; $k_0 = 0.7\varepsilon$, Fig.I-5c; $k_0 = 0.9\varepsilon$, Fig.I-5d; $\Delta k = 0.1k_0$; e dall'alto verso il basso: $a = 1/\varepsilon$, $a = 3/\varepsilon$, $a = 6/\varepsilon$, $a = 10/\varepsilon$, $a = 15/\varepsilon$, $a = 20/\varepsilon$, $a = 25/\varepsilon$. Notiamo che i grafici relativi agli ultimi due valori non compaiono nelle prime due figure a causa della forte attenuazione del picco.}

In Fig.I-4 sono riportati i grafici di $T(k)f(k - k_0)$, per diversi valori dello spessore della barriera e di k_0 (notare la scala logaritmica). Come si può vedere: solo per valori di k_0/ε abbastanza vicini ad uno ($k_0/\varepsilon = 0.9$) buona parte del tunnel avviene per componenti di energia al di sopra dell'energia di barriera.

Notiamo infine che, anche quando il picco dovesse spostarsi in avanti, ciò non avrebbe alcuna influenza diretta sulla sua posizione nello spazio delle x , se non fosse che, in tal caso, sia $\tau_{T,R}^\varphi$, che $\Delta\tau_{T,R}^\varphi$, perderebbero qualsiasi significato fisico in quanto calcolati in $k = k_0$.

Tutto ciò ci assicura che *il pacchetto trasmesso, che andiamo a rivelare, non presenta delle grosse deformazioni rispetto a quello incidente.*

I.3) Tempi costruiti seguendo il centroide.

Alcuni autori, anziché seguire il picco attraverso il metodo della fase stazionaria, preferiscono usare come riferimento il centroide (o centro di massa) del pacchetto. Ciò, sia perché, come abbiamo visto, per poter applicare il metodo della fase stazionaria abbiamo bisogno di pacchetti molto stretti in k , e questo li rende molto estesi nello spazio ordinario, sia soprattutto perché, così facendo, è possibile valutare l'effetto di eventuali accelerazioni causate dall'attraversamento della barriera.

Supponiamo che inizialmente ($t \leq 0$) il pacchetto si trovi ad una certa distanza dalla barriera tale che:

$$\int_0^\infty |\psi(x, 0)|^2 dx \simeq 0$$

che sia, cioè, trascurabile la probabilità che la particella si possa venire a trovare oltre lo 0. Identifichiamo la posizione della particella all'istante $t = 0$ attraverso la posizione del suo “centro di massa”, cioè:

$$\bar{x}(0) = \frac{\int_{-\infty}^\infty x |\psi(x, 0)|^2 dx}{\int_{-\infty}^\infty |\psi(x, 0)|^2 dx} \quad (I.3.0)$$

Dato:

$$f(k) = f(k, 0) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx \psi(x, 0) e^{-ikx} = |f(k)| e^{i\xi(k)} \quad (I.3.1)$$

si può dimostrare che[11]:

$$x_0 = \bar{x}(0) = \frac{-\int_0^\infty dk |f(k)|^2 \frac{d\xi}{dk}}{\int_0^\infty dk |f(k)|^2} = -\langle \xi'(k) \rangle \quad (I.3.2)$$

e ponendo:

$$\begin{aligned} \langle \dots \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dk |f(k)|^2; & \langle \dots \rangle_{\text{in}} &= \frac{\langle \dots 1 \rangle}{\langle 1 \rangle} = \langle \dots 1 \rangle; \\ \langle \dots \rangle_{\text{T}} &= \frac{\langle \dots |T|^2 \rangle}{\langle |T|^2 \rangle}; & \langle \dots \rangle_{\text{R}} &= \frac{\langle \dots |R|^2 \rangle}{\langle |R|^2 \rangle} \end{aligned}$$

avremo:

$$\bar{x}_{\text{in}}(t) = x_0 + \frac{\hbar}{m} \langle k \rangle_{\text{in}} t, \quad (t \rightarrow 0); \quad (I.3.3)$$

$$\bar{x}_{\text{T}}(t) = x_0 + \frac{\hbar}{m} \langle k \rangle_{\text{T}} t - \langle \alpha' \rangle_{\text{T}}, \quad (t \rightarrow \infty); \quad (I.3.4)$$

$$\bar{x}_{\text{R}}(t) = x_0 + \frac{\hbar}{m} \langle k \rangle_{\text{R}} t - \langle \beta' \rangle_{\text{R}}, \quad (t \rightarrow \infty); \quad (I.3.5)$$

Facendo evolvere in avanti nel tempo $\bar{x}_{\text{in}}(t)$ e $\bar{x}_{\text{R}}(0)$, ed indietro $\bar{x}_{\text{T}}(t)$, si possono estrapolare $t_{\text{in}}(0)$, $t_{\text{R}}(0)$ e $t_{\text{T}}(d)$, rispettivamente come tempi per i quali il centroide passa per 0 e per d .^{#5}

I tempi di trasmissione e di riflessione saranno dati allora da:

$$\tau_{\text{T}}^{\text{C}} = t_{\text{T}}(d) - t_{\text{in}}(0) = \frac{m}{\hbar} \left[\frac{1}{\langle k \rangle_{\text{T}}} (d - x_0 + \langle \alpha' \rangle) + \frac{x_0}{\langle k \rangle_{\text{in}}} \right]; \quad (I.3.6)$$

$$\tau_{\text{R}}^{\text{C}} = t_{\text{R}}(0) - t_{\text{in}}(0) = \frac{m}{\hbar} \left[\frac{-x_0 + \langle \beta' \rangle_{\text{R}}}{\langle k \rangle_{\text{R}}} + \frac{x_0}{\langle k \rangle_{\text{in}}} \right]. \quad (I.3.7)$$

Leavens e Aers[12] dimostrano che, nel limite $\Delta k \rightarrow 0$, si ha: $\tau_{\text{T}}^{\text{C}} \rightarrow \Delta \tau_{\text{T}}^{\varphi}$ e $\tau_{\text{R}}^{\text{C}} \rightarrow \Delta \tau_{\text{R}}^{\varphi}$, e che, comunque, le eventuali correzioni sono del primo ordine in Δk , il che conferma i ragionamenti di natura qualitativa precedentemente fatti.

Risultati analoghi sono raggiunti anche da Martin e Landauer[13] che eseguono il calcolo nel caso elettromagnetico, e da Collins, Lowe e Barker[3] che seguono l'evoluzione temporale di un pacchetto gaussiano attraverso l'equazione di Schrödinger time-dependent.

Anche loro però, pur calcolando esplicitamente il momento in cui il centroide lascia la barriera (non c'è autointerferenza per la funzione d'onda per $x \geq d$), *estrapolano* quello in cui questa viene raggiunta dal centroide[6].

Passiamo ora ad esaminare alcuni dei tempi definiti mediante “orologi”.

^{#5} Notiamo che stiamo sempre usando delle forme asintotiche della funzione d'onda, trascurando quindi, sempre, gli effetti di autointerferenza in prossimità della barriera.

I.4) Tempi di Büttiker e Landauer.

Per determinare τ_T , Büttiker e Landauer[14 – 16], nel 1982, propongono di considerare una barriera rettangolare oscillante nel tempo, supponendo il tempo di attraversamento della sudetta barriera pari al tempo di interazione delle particelle con il potenziale oscillante.

Consideriamo allora una barriera di potenziale rettangolare di altezza V_0 , a cui venga sovrapposto un potenziale oscillante $\delta V \cos \omega t$.

A frequenze piuttosto basse, il potenziale varierà molto lentamente, dunque la particella, nell'attraversamento, risentirà solo di una parte del ciclo di modulazione e, finché il periodo corrispondente all'oscillazione sarà lungo rispetto al tempo di attraversamento, la particella interagirà con un potenziale quasi statico.

A frequenze più alte ($\omega \gg 1/\tau_T$), la particella, pur vedendo un potenziale medio V_0 , subirà l'effetto di vari cicli di oscillazione e potrà assorbire o cedere dei quanti di energia pari a $\hbar\omega$.

La frequenza a cui avviene la transizione tra il comportamento adiabatico, tipico delle basse frequenze, e quello in cui si presenta assorbimento o cessione di energia, fornisce una misura del tempo di interazione della particella con la barriera. Naturalmente questa sarà soltanto un'indicazione approssimata di tale tempo.

Al primo ordine in δV appariranno solo le due bande $E \pm \hbar\omega$. Inoltre le particelle appartenenti alla banda energetica più alta saranno favorite nell'attraversamento rispetto a quelle di energia più bassa.

Büttiker e Landauer mostrano quindi che, per barriere spesse e frequenze non troppo elevate ($\hbar\omega$ piccolo rispetto sia ad E sia a $V_0 - E$), l'intensità relativa delle due bande sarà data da:

$$I_{\pm}^T(\omega) = \frac{|T_{\pm}(\omega)|}{|T(\omega)|^2} = \left(\frac{\delta V}{2\hbar\omega} \right)^2 [e^{\pm i\omega \frac{md}{\hbar\kappa}} - 1]^2. \quad (I.4.0)$$

I due autori identificano quindi il tempo di attraversamento con: $\tau_T^{\text{BL}} = md/(\hbar\kappa)$.

Nel limite di frequenze molto piccole la (I.4.0) si riduce a:

$$\left| \frac{T_{\pm}(\omega)}{T(\omega)} \right|^2 = \left(\frac{\delta V}{2\hbar\omega} \right)^2. \quad (I.4.1)$$

Come ci aspettiamo, il numero di particelle che avranno assorbito o emesso energia è, in questo caso, assolutamente indipendente da ω .

Sempre dalla (I.4.0) si ha :

$$\frac{T_+ - T_-}{T_+ + T_-} = \tanh(\omega\tau_T^{\text{BL}}) \quad (I.4.2)$$

Ciò mostra come proprio τ_T^{BL} determini il passaggio dal comportamento adiabatico a basse frequenze, dove $T_+ \simeq T_-$, a quello ad alte frequenze dove $T_+ \gg T_-$.

Per quanto riguarda le particelle riflesse, sempre nei limiti $\hbar\omega \ll E$ e $\hbar\omega \ll V_0 - E$, trovano:

$$\left| \frac{R_{\pm}}{R} \right|^2 = \left(\frac{\delta V \tau_R}{2\hbar} \right)^2, \quad (I.4.3)$$

con $\tau_R = \hbar k / (V_0 \kappa)$.

Notiamo che anche la (I.4.3) è indipendente da ω .

Il comportamento a basse frequenze di eq.(I.4.1) ed eq.(I.4.3) è tipico di un sistema a due stati, $|1\rangle$ e $|2\rangle$, di energia E ed $E \pm \hbar\omega$, portati in risonanza da una perturbazione $V_1 \cos \omega t$. Se per $t = 0$ l'intera popolazione del sistema si trova nello stato $|1\rangle$, la popolazione dello stato $|2\rangle$ cresce inizialmente con $\left(\frac{V_1 t}{2\hbar}\right)^2$. Analogamente avviene se le energie dei due livelli E_1 ed E_2 sono uguali. Nelle (I.4.1) e (I.4.3) τ_T^{BL} e τ_R^{BL} giocano quindi effettivamente il ruolo dei tempi di interazione del sistema particella-barriera.

I.5) Tempi di Larmor.

Nel 1966 Baz'[17, 18] propone di sfruttare la precessione di Larmor, causata dalla presenza di un campo magnetico su particelle dotate di spin, per misurare i tempi di collisione di queste particelle.

Nello stesso anno Rybachenko[19] applica questo metodo per calcolare i tempi di tunnelling nel caso unidimensionale di una barriera rettangolare.

Consideriamo allora un fascio di particelle di spin $\frac{1}{2}$, polarizzate in direzione \hat{x} , massa m e energia cinetica E , che si muovono in direzione \hat{y} (vedi Fig.I-5). Supponiamo inoltre che un campo magnetico omogeneo debole, \vec{B}_0 , rivolto lungo l'asse \hat{z} , occupi la zona della barriera, sovrapponendosi a questa.

Figura I-5.

Seguendo il ragionamento di Rybachenko, le particelle che penetreranno la barriera, attraversando il campo magnetico, subiranno una precessione di Larmor con frequenza $\omega_L = g\mu B_0/\hbar$, con g rapporto giromagnetico, e μ momento magnetico delle particelle.

La precessione si arresterà nel momento in cui la particella riemergerà da una delle due facce della barriera.

Poiché[20] valgono

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle_T &= \frac{\hbar}{2} \cos \omega_L \tau^L, \\ \langle S_y \rangle_T &= -\frac{\hbar}{2} \sin \omega_L \tau^L, \end{aligned}$$

nel limite di campi magnetici deboli avremo:

$$\langle S_x \rangle_T \simeq \frac{\hbar}{2},$$

$$\langle S_y \rangle_T \simeq -\frac{\hbar}{2} \omega_L \tau_{yT}^L,$$

dunque, la componente di spin acquistata in direzione \hat{y} dalla particella sarà proporzionale al suo tempo di permanenza all'interno della barriera. Poniamo allora:

$$\tau_{yT}^L = \lim_{\omega_L \rightarrow 0} \frac{\langle S_y \rangle_T}{-\frac{1}{2} \hbar \omega_L}$$

Stranamente, però, Rybachenko non prende in considerazione l'effetto maggiore del campo sulle particelle, cioè l'allineamento degli spin nella propria direzione. Uscendo dalla barriera, infatti, gli spin delle particelle avranno acquistato anche una componente lungo \hat{z} pari a $\pm \hbar/2$.

Mentre al di fuori della barriera l'energia della particella era indipendente dallo spin, al suo interno questa dipenderà anche dalla componente z dello spin, a causa dell'effetto Zeeman.

La differenza di energia per le particelle spin-up e spin-down sarà $\pm \hbar \omega_L/2$. Le particelle spin-up penetreranno quindi meglio la barriera. Ponendo:

$$\psi_{\text{in}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{iky}$$

$$\psi_T = (|D_+|^2 + |D_-|^2)^{-1/2} \begin{pmatrix} D_+ \\ D_- \end{pmatrix} e^{iky}$$

con:

$$D_{\pm} = T(\kappa_{\pm}) e^{\alpha} e^{-i\kappa_{\pm} d}$$

dove κ_{\pm} è il κ corrispondente a $E \pm \frac{\hbar}{2} \omega_L$. Se:

$$\langle S_i \rangle_T = \frac{\hbar}{2} \langle \psi | \hat{\sigma}_i | \psi \rangle,$$

otteniamo:

$$\langle S_z \rangle_T = \frac{\hbar}{2} \frac{|T_+|^2 - |T_-|^2}{|T_+|^2 + |T_-|^2}, \quad (I.5.0a)$$

$$\langle S_y \rangle_T = -\hbar \sin(\alpha_+ - \alpha_-) \frac{|T_+ T_-|}{|T_+|^2 + |T_-|^2}, \quad (I.5.0b)$$

$$\langle S_x \rangle_T = \hbar \cos(\alpha_+ - \alpha_-) \frac{|T_+ T_-|}{|T_+|^2 + |T_-|^2}. \quad (I.5.0c)$$

Espressioni analoghe si trovano per le particelle riflesse, basta sostituire T_{\pm} con R_{\pm} . Si può inoltre dimostrare che:

$$\langle S_z \rangle_R = - \langle S_z \rangle_T \frac{|T_+|^2 - |T_-|^2}{|R_+|^2 + |R_-|^2}, \quad (I.5.1a)$$

$$\langle S_y \rangle_R = - \langle S_y \rangle_T \left| \frac{R_+ R_-}{T_+ T_-} \right| \frac{|T_+|^2 + |T_-|^2}{|R_+|^2 + |R_-|^2} \quad (I.5.1b)$$

$$\langle S_x \rangle_R = - \langle S_x \rangle_T \left| \frac{R_+ R_-}{T_+ T_-} \right| \frac{|T_+|^2 + |T_-|^2}{|R_+|^2 + |R_-|^2} \quad (I.5.1c)$$

Nel caso di campo magnetico debole $\kappa_{\pm} \simeq \kappa \mp m\omega_L/\hbar$, ed inoltre

$$|T_+|^2 - |T_-|^2 \sim -\frac{m\omega_L}{\hbar\kappa} \frac{\partial T}{\partial \kappa}. \quad (I.5.2)$$

Nella (I.5.2) il termine $\frac{m}{\hbar\kappa} \frac{\partial T}{\partial \kappa}$, che moltiplica ω_L , ha, naturalmente, le dimensioni di un tempo. Büttiker[21] nel 1983 suggerisce allora l'introduzione di tre tempi τ_{zT}^L , τ_{yT}^L e τ_{xT}^L , nel seguente modo. Pone:

$$\langle S_z \rangle_T = (\hbar/2)\omega_L \tau_{zT}^L, \quad (I.5.3a)$$

$$\langle S_y \rangle_T = -(\hbar/2)\omega_L \tau_{yT}^L, \quad (I.5.3b)$$

$$\langle S_x \rangle_T = (\hbar/2)[1 - (\omega_L^2 \tau_{xT}^L)^2]/2], \quad (I.5.3c)$$

saranno allora:

$$\tau_{zT}^L = \lim_{\omega_L \rightarrow 0} \frac{\langle S_z \rangle_T}{\frac{\hbar}{2}\omega_L} = -\frac{m}{\hbar\kappa} \frac{\partial \ln T}{\partial \kappa}, \quad (I.5.4a)$$

$$\tau_{yT}^L = \lim_{\omega_L \rightarrow 0} \frac{\langle S_y \rangle_T}{\frac{\hbar}{2}\omega_L} = -\frac{m}{\hbar\kappa} \frac{\partial \alpha}{\partial \kappa}, \quad (I.5.4b)$$

$$\tau_{xT}^L = \lim_{\omega_L \rightarrow 0} \frac{\langle S_x \rangle_T}{\frac{\hbar}{2}\omega_L} = \frac{m}{\hbar\kappa} \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \kappa} \right)^2 + \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \kappa} \right)^2 \right]. \quad (I.5.4c)$$

Svolgendo i calcoli Büttiker ottiene:

$$\tau_{zT}^L = \frac{m\varepsilon^2}{\hbar\kappa^2} \frac{(\kappa^2 - k^2) \sinh^2(\kappa d) + (\kappa d \varepsilon^2/2) \sinh(2\kappa d)}{4k^2\kappa^2 + \varepsilon^4 \sinh^2(\kappa d)} \quad 5.5a$$

$$\tau_{yT}^L = \frac{mk}{\hbar\kappa^2} \frac{2\kappa d(\kappa^2 - k^2) + \varepsilon^2 \sinh(2\kappa d)}{4k^2\kappa^2 + \varepsilon^4 \sinh^2(\kappa d)} \quad 5.5b$$

$$\tau_{xT}^L = \sqrt{\tau_{zT}^2 + \tau_{yT}^2} \quad 5.5c$$

Per barriere abbastanza spesse si ha:

$$\tau_{zT}^L \simeq \frac{md}{\hbar\kappa}, \quad \tau_{yT}^L \simeq \frac{2mk}{\hbar\varepsilon^2\kappa} \quad (I.5.6)$$

Notiamo dunque che, nel limite di barriere spesse, $\tau_{zT}^L = \tau_T^{BL}$. Del resto, nel caso della componente z dello spin, non abbiamo una vera e propria precessione, ma un “salto” in posizione spin-up o spin-down, salto accompagnato da uno splittamento dei livelli energetici.

Lo stesso Büttiker[21] dimostra inoltre che: anche per τ_{zT}^L si può fare lo stesso discorso del sistema a due livelli fatto per τ_T^{BL} . Questi due tempi comunque, a mio parere ed in base ai

risultati sperimentali, vanno considerati come tempi di risposta della particella alla perturbazione in qualche grado di libertà diverso dalla posizione, e quindi non come tempi di attraversamento.

Per quanto riguarda poi τ_{xT}^L , è ancora più difficile assegnargli un significato fisico: infatti, se immaginiamo che anche la componente x dello spin preceda intorno all'asse \hat{z} , allora a tale precessione dovrebbe corrispondere una componente media dello spin in direzione x pari a:

$$\langle S_x \rangle_T = (\hbar/2)[1 - (\omega_L^2 \tau_{yT}^L)^2/2],$$

e non a:

$$\langle S_x \rangle_T = (\hbar/2)[1 - (\omega_L^2 \tau_{xT}^L)^2/2]. \quad (I.5.3c)$$

Dunque alla luce di quanto detto prima su τ_{zT}^L , τ_{xT}^L potrebbe al massimo essere visto come una media di τ_{yT}^L e τ_{yT}^L e, infatti, alcuni autori introducono direttamente un tempo $\tau_T^B =$

$$\sqrt{\tau_{yT}^L{}^2 + \tau_{yT}^L{}^2}.$$

Nel limite di barriere spesse $\tau_T^B \simeq \tau_{zT}^L$.

L'unico dei tre *tempi di Larmor* qui definiti, cui sembra quindi possibile attribuire un significato fisico, è τ_{yT}^L .

Per questo, Falk e Hauge[22] trovano, nel 1988, le seguenti due relazioni:

$$\tau_{yT}^L = \frac{m}{\hbar k}(x_2 - x_1 + \alpha') + \frac{mR}{2\hbar k^2}[\sin(\beta - 2kx_1) - \sin(2\alpha - \beta + 2kx_2)] \quad (I.5.7a)$$

e

$$\begin{aligned} \tau_{yT}^L = \frac{m}{\hbar k}(x_2 - x_1 + \alpha') + \frac{mR}{2\hbar k^2}[\sin(\beta - 2kx_1) - \sin(2\alpha - \beta + 2kx_2)] + \\ \frac{m}{2\hbar k^2 R}[\sin(\beta - 2kx_1) + \sin(2\alpha - \beta + 2kx_2)] \end{aligned} \quad (I.5.7b)$$

per la parte riflessa, dove x_1 e x_2 sono due qualsiasi punti esterni alla barriera (uno alla sua destra ed uno alla sua sinistra) e il campo magnetico, anziché essere limitato alla sola zona della barriera, è esteso a tutto l'intervallo (x_1, x_2) .

Si vede facilmente che le (I.5.7) corrispondono ai *phase time* più dei termini oscillanti, le cui ampiezze aumentano al diminuire dell'energia incidente.

Nel caso di barriera rettangolare abbiamo:

$$\tau_{yT}^L(d) = \tau_{yR}^L(d) = \tau^D(d),$$

dove τ^D non è altro che il *dwell time*, che introdurremo in seguito.

I.6) Tempi complessi: path-integral.

L'introduzione di tempi complessi nasce inizialmente dalla seguente idea: al di sopra dell'energia di barriera $v = \hbar\kappa = \hbar\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}$ e, dunque, $\tau_T = \frac{d}{v} = \frac{md}{\hbar\kappa}$.

Per $E < V_0$, invece, il vettore d'onda diviene immaginario; consideriamo però lo stesso il moto della particella sotto barriera, come se esso avvenisse lungo una traiettoria classica, ma a velocità e tempo immaginari.

Naturalmente non è possibile dare a queste quantità alcun significato fisico, in quanto, se “dall'entrata” della particella all'interno della barriera, alla sua “uscita” da una delle due faccie, sarà trascorso un certo tempo, per quanto piccolo (o grande) questo possa essere, dovrà per forza essere una quantità reale.

Potremmo allora immaginare che siano le traiettorie ad essere complesse, ed i tempi e le velocità reali, considerando le quantità:

$$v^S = \frac{\hbar|\kappa|}{m},$$

$$\tau_T^S = \frac{d}{v} = \frac{md}{\hbar\kappa},$$

dove la S sta per *semiclassiche*.

Naturalmente anche τ_T^S è fisicamente inaccettabile, in quanto diverge per $k = \varepsilon$ e resterebbe poi, in ogni caso, il problema delle particelle riflesse.

Notiamo comunque che, nel caso di barriere spesse anche τ_t^{BL} , e naturalmente τ_{zT}^L , tendono a τ_T^S .

Per quanto fisicamente inaccettabile, è interessante notare che nel 1992 Hagmann propone di considerare il caso di una particella che, per attraversare la barriera, acquisti una certa energia ΔE , per un intervallo di tempo Δt . Il risultato che viene fuori applicando il principio di indeterminazione è proprio $\Delta t = \tau_T^S = \frac{md}{\hbar\kappa}$.

Tornando ai tempi complessi, nel 1987, Sokolovski e Baskin[23] propongono una generalizzazione del concetto classico di tempo alla meccanica quantistica ed applicano, poi, il metodo proprio al caso del tunnelling.

Cosideriamo una particella che, emessa all'istante t_1 nel punto \vec{r}_1 , sia rivelata all'istante t_2 nel punto \vec{r}_2 . Supponiamo inoltre che la particella, muovendosi lungo la traiettoria $\vec{r}(t)$, in un potenziale $V(\vec{r})$, abbia attraversato una certa zona di spazio Ω .

Il tempo trascorso dalla particella in quella regione di spazio sarà dato allora da:

$$\tau_{\text{cl}}^\Omega = \int_{t_1}^{t_2} dt \Theta_\Omega(\vec{r}(t)), \quad (I.6.0)$$

dove $\Theta_\Omega(\vec{r}(t))$ è 1 se $\vec{r}(t)$ appartiene ad Ω , 0 altrimenti. Nel caso unidimensionale avremo:

$$\tau_{\text{cl}}^\Omega = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^d dx \delta(x - x(t)). \quad (I.6.1)$$

Se allora usiamo il metodo del *path-integral* di Feynman per costruirci delle traiettorie su cui mediare i tempi, otteniamo:

$$\tau^\Omega(x_1, t_1; x_2, t_2; k) = \langle \tau_{\text{cl}}^\Omega[x(\cdot)] \rangle_{\text{path}},$$

in cui $x(\cdot)$ è un cammino arbitrario (nello spazio delle fasi) tra (x_1, t_1) e (x_2, t_2) . In generale τ^Ω sarà complesso.

Sokolovski e Baskin trovano quindi:

$$\tau_T^\Omega = i\hbar \int_0^d dx \frac{\delta \ln A}{\delta V(x)}, \quad (I.6.2)$$

$$\tau_R^\Omega = i\hbar \int_0^d dx \frac{\delta \ln B}{\delta V(x)}, \quad (I.6.2)$$

con $A = Te^{i\alpha}$, $B = Re^{i\beta}$. Nello stesso articolo i due autori trovano una relazione tra τ^Ω e i *tempi di Larmor*:

$$\text{Re } \tau_T^\Omega = \tau_{yT}^L, \quad (I.6.3a)$$

$$\text{Im } \tau_T^\Omega = \tau_{zT}^L, \quad (I.6.3b)$$

$$|\tau_T^\Omega| = -\tau_{xT}^L. \quad (I.6.3c)$$

Analogamente per la parte riflessa avremo:

$$\text{Re } \tau_R^\Omega = \tau_{yR}^L, \quad (I.6.4a)$$

$$\text{Im } \tau_R^\Omega = \tau_{zR}^L, \quad (I.6.4b)$$

$$|\tau_R^\Omega| = \tau_{xR}^L. \quad (I.6.4c)$$

Malgrado la connessione così sorprendente tra τ^Ω e i *tempi di Larmor*, è difficile dare una interpretazione fisica di tali risultati, in quanto, come già detto, se esiste un tempo legato all'attraversamento della barriera, questo deve comunque essere reale.

Una (apparentemente un po' assurda, ma forse non tanto quanto sembra: si ricordi ad es. la teoria dell'elettrone, con cronone, di Caldirola: cfr. R.H.A.Farias e E.Recami, "Introduction of a quantum of Time ('chronon') and its consequences for quantum mechanics", archivi elettronici LANL # quant-ph/9706059) è forse quella data da Hänggi[24] nel 1993. Secondo quest'autore il tempo di tunnelling sarebbe caratterizzato da due scale di tempi. Non sa però spiegare dare un significato fisico all'idea.

Sokolovski e Connor,[25] nello stesso anno, criticando tale affermazione, insistono sul fatto che è impossibile e fisicamente insensato pensare che vi possano essere due tempi di attraversamento diversi. Concludono quindi che quello che va considerato come tempo di attraversamento è il modulo di τ_T^Ω .

Soffermiamoci, però, un attimo sull'ipotesi di Hänggi. Se guardiamo alla forma dell'onda trasmessa, possiamo osservare che:

$$\psi_T = \psi_{\text{III}}(x, k) = T(k)e^{i\alpha}e^{ikx} = e^{\ln T(k)}e^{i\alpha}e^{ikx}. \quad (I.6.5)$$

Notiamo allora che ogni qual volta applichiamo certi metodi otteniamo un tempo legato a $d\alpha/dE$, ed uno legato a $d \ln T/dE$.

Potremmo allora immaginare questo secondo tempo come il tempo che impiega la barriera a smorzare il segnale durante l'attraversamento, tempo che non influirebbe affatto sulla sua velocità. Appare comunque strana, in questo caso, la dipendenza di tale tempo da d , in quanto, in questo modo, τ_T^Ω anziché diminuire all'aumentare dello spessore della barriera, aumenta proporzionalmente a esso.

Andrebbe poi spiegato come tale tempo possa essere legato alle transizioni di livello, sia nel caso di Büttiker-Landauer, sia nel caso degli spin.

I.7) Tempi complessi: metodo di Bohm.

Sempre nell'ambito dei tempi complessi, Leavens e Aers[26], nel 1993, partendo dallo stesso operatore introdotto da Sokolovski e Baskin (τ_{cl}^Ω), propongono l'uso del metodo di Bohm per ricavare delle traiettorie “semiclassiche” da adoperare per il calcolo del tempo medio.

Il metodo di Bohm, come sappiamo, ci fornisce un'equazione del tutto equivalente all'equazione di Schrödinger, consentendoci contemporaneamente un'interpretazione più “classica” dei fenomeni quantistici. Accenniamo brevemente ad esso.

Poniamo $\psi = Re^{iS/\hbar}$, con R, S reali. Applicando l'equazione di Schrödinger a ψ e separando la parte reale e quella immaginaria, otteniamo una equazione di continuità (la seconda delle due), ed un'equazione equivalente a quella di Hamilton-Jacobi per un potenziale $V(x)$ modificato, a cui è stato aggiunto il termine:

$$Q = - \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) R^{-1} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}$$

e la cui soluzione ci dà S .

La R invece viene ricavata dall'equazione di continuità.

Se consideriamo l'approssimazione WKB, e trascuriamo il potenziale quantistico Q , otteniamo per la S delle soluzioni di un'equazione di Hamilton-Jacobi classica nel potenziale originario: naturalmente, in questo caso, S può essere, anzi sarà spesso, una quantità complessa. Notiamo infine che, anche se quelle che otteniamo con il metodo di Bohm son traiettorie classiche, queste provengono da un potenziale modificato.

I risultati fin qui ottenuti con questo metodo portano comunque a risultati fisicamente assurdi (vedi ref. [6] e [24]) e quindi non ce ne occupiamo.

I.8) Dwell time.

Il *Dwell time* viene introdotto per la prima volta da Smith[27] nel 1960, allo scopo di calcolare la durata media di un processo di collisione senza distinguere tra i vari canali e, come già detto, viene definito come rapporto tra la probabilità che la particella si trovi in una certa

regione di spazio ed il flusso j_{in} entrante in quella stessa regione, senza considerare, nel nostro caso, se la particella verrà riflessa o trasmessa:

$$\begin{aligned}\tau^{\text{D}}(x_1, x_2; k) &= j_{\text{in}}^{-1} \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x, k)|^2 dx = \\ &= \frac{1}{v_{\text{g}}} \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x, k)|^2 dx.\end{aligned}\tag{I.0.0}$$

Nel caso di barriera rettangolare abbiamo:

$$\tau^{\text{D}}(x_1, x_2; k) = \frac{mk}{\hbar\kappa^2} \frac{2\kappa d(\kappa^2 - k^2) + \varepsilon^2 \sinh(2\kappa d)}{4k^2\kappa^2 + \varepsilon^4 \sinh^2(\kappa d)}\tag{I.8.0}$$

che, per $\kappa d \gg 1$, diventa:

$$\tau^{\text{D}} = \frac{\hbar k}{V_0 \kappa} = \frac{2mk}{\hbar \varepsilon^2 \kappa}\tag{I.8.1}$$

Per barriere abbastanza spesse, dunque, anche τ^d , come $\tau_{\text{T,R}}^\varphi$ e $\Delta\tau_{\text{T,R}}^\varphi$, diventa indipendente dal loro spessore ma, in forte contrasto con questi, diminuisce al diminuire di k , fino ad annullarsi per $k = 0$.

Data la sua definizione, ed il fatto che la trasmissione o la riflessione di una particella da parte di una barriera sono eventi mutualmente esclusivi, molti autori (quasi tutti) concludono che qualunque tempo candidato a rappresentare τ_{T} e τ_{R} debba necessariamente verificare la relazione:

$$\tau_{\text{D}} = |T(k)|^2 \tau_{\text{T}} + |R(k)|^2 \tau_{\text{R}}.\tag{I.0.1}$$

Tale relazione è ad esempio verificata da τ^Ω . Sokolovski e Baskin[23] nel 1987 trovano infatti la relazione:

$$\tau^{\text{D}} = |R|^2 \tau_{\text{R}}^\Omega + |T|^2 \tau_{\text{T}}^\Omega.$$

Da questa separando parte reale e parte immaginaria si ottiene poi:

$$\begin{cases} \tau^{\text{D}} = |R|^2 \tau_{y\text{R}}^{\text{L}} + |T|^2 \tau_{y\text{T}}^{\text{L}} \\ |R|^2 \tau_{z\text{R}}^{\text{L}} + |T|^2 \tau_{z\text{T}}^{\text{L}} = 0. \end{cases}$$

La prima di queste due equazioni viene ricavata indipendentemente anche da Falck e Hauge[22] nell'anno successivo. La seconda, invece, non ci dà altro che una legge di conservazione del momento angolare, o meglio, in questo caso, della componente z dello spin.

La (I.01) invece sembra non essere verificata nel caso dei *phase time* e, a maggior ragione, dei tempi di fase “estrapolati”. Anzi, Hauge et al.[11] trovano la seguente relazione:

$$\begin{aligned}\tau^{\text{D}}(x_1, x_2; k) &= \\ &|T(k)|^2 \tau_{\text{T}}^\varphi(x_1, x_2; k) + |R(k)|^2 \tau_{\text{R}}^\varphi(x_1, x_2; k) + \\ &\frac{mR}{\hbar k^2} \sin(\beta - 2kx_1)\end{aligned}\tag{I.8.2}$$

Tuttavia, i due autori dimostrano anche che se consideriamo che ogni pacchetto ha una certa larghezza in k ($\Delta k = \sigma$) e applichiamo la (I.8.2) a tutto il pacchetto, abbiamo:^{#6}

$$\begin{aligned} & \langle \tau^D(x_1, x_2; k) \rangle \simeq \\ & \langle |T(k)|^2 \rangle \langle \tau_T^\varphi(x_1, x_2; k) \rangle + \langle |R(k)|^2 \rangle \langle \tau_R^\varphi(x_1, x_2; k) \rangle + \\ & + \frac{mR}{\hbar k^2} \sigma^{-1} \int dk \sin(\beta - 2kx_1) + O(\sigma) \end{aligned} \quad (I.8.3)$$

Se dunque $|x_1| \gg \sigma^{-1}$, l'argomento dell'integrale oscillerà abbastanza velocemente da renderlo trascurabile e quindi possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} & \langle \tau^D(x_1, x_2; k) \rangle = \\ & \langle |T(k)|^2 \rangle \langle \tau_T^\varphi(x_1, x_2; k) \rangle + \langle |R(k)|^2 \rangle \langle \tau_R^\varphi(x_1, x_2; k) \rangle \end{aligned} \quad (I.8.4)$$

Relazione in accordo con la (I.0.1) a meno di $O(\sigma)$.

Naturalmente la (I.8.4) non è valida per i tempi di fase estrapolati, e mette nuovamente in evidenza il carattere puramente asintotico dei *phase time*.

Prima di passare alle critiche mosse da alcuni autori nei confronti del *dwell time*, analizziamo un po' meglio la (I.8.2).

Secondo Hauge e Stovneng[5] questa proverebbe che τ^D rappresenta proprio il tempo esatto trascorso dalle particelle all'interno della barriera, mentre il termine $\frac{mR}{\hbar k^2} \sin(\beta - 2kx_1)$ dovrebbe rappresentare un $\Delta\tau$ provocato dagli effetti di auto-interferenza.

Infatti, se calcoliamo il *dwell time* in un intervallo $(-L, x_1)$ e facciamo tendere L all'infinito, il valore che otteniamo divergerà anch'esso a $+\infty$. Sottraendo però il *dwell time* calcolato in $(-L, x_1)$ solo sulla particella incidente, otteniamo^{#7} un $\Delta\tau^D(x < x_1; k)$ che, facendo i conti, risulta proprio:

$$\Delta\tau^D(x < x_1; k) = -\frac{mR}{\hbar k} \sin(\beta - 2x_1). \quad (I.8.5)$$

La (I.8.2) può quindi essere riscritta come:

$$\begin{aligned} & |T(k)|^2 \tau_T^\varphi(x_1, x_2; k) + |R(k)|^2 \tau_R^\varphi(x_1, x_2; k) = \\ & \tau^D(x_1, x_2; k) + \Delta\tau^D(x < x_1; k) = \\ & \tau^D(x_1, x_2; k) - \frac{mR}{\hbar k^2} \sin(\beta - 2kx_1) \end{aligned} \quad (I.8.6)$$

^{0#6} Naturalmente in (I.8.3) dovremmo considerare $\langle |T(k)|^2 \tau_T^\varphi(x_1, x_2; k) \rangle$ e $\langle |R(k)|^2 \tau_R^\varphi(x_1, x_2; k) \rangle$, invece di $\langle |T(k)|^2 \rangle \langle \tau_T^\varphi(x_1, x_2; k) \rangle$ e $\langle |R(k)|^2 \rangle \langle \tau_R^\varphi(x_1, x_2; k) \rangle$. Si può però dimostrare[4] che l'errore che si commette usando la (I.8.4) è dell'ordine di σ .

^{0#7} Un procedimento simile, in cui si valutano però i flussi positivi e quelli negativi separatamente, verrà adottato da Olkhovsky e Recami per generalizzare la definizione di *dwell time*.

A favore di questa tesi i due autori portano il fatto che il suddetto termine di auto-interferenza è del tutto indipendente da $T(k)$ e da $\alpha(k)$, proprio perché non c'è interferenza per $x > d$. Aggiungono quindi gli esempi di due casi limite.

Il primo riguarda una barriera infinitamente spessa (in pratica uno scalino). Essendo la barriera infinitamente spessa, non ci saranno particelle trasmesse e tutte le particelle verranno riflesse: $R = 1$. È allora facile dimostrare che:

$$\begin{aligned}\Delta\tau_R^\varphi &= \frac{2}{\kappa v} = \frac{2m}{\hbar k \kappa} \\ \tau^D &= \frac{E}{V_0} \Delta\tau_R^\varphi, \\ \Delta\tau^D &= \frac{E - V_0}{V_0} \Delta\tau_R^\varphi.\end{aligned}$$

In questo caso scompare l'apparente contraddizione tra il *tempo di fase estrapolato*, che aumenta con k^{-1} al tendere di $k \rightarrow 0$, e il *dwell time* che invece va a 0 con $E/v_g \sim k$. Infatti, se τ^D è il tempo speso all'interno della barriera e $\Delta\tau^D$ il ritardo (o anticipo) dovuto all'autointerferenza, poiché al diminuire dell'energia incidente la particella penetrerà sempre meno all'interno della barriera, a prevalere sarà il secondo termine, cioè $\Delta\tau^D$.

Il secondo esempio riguarda, invece, una barriera a forma di delta di Dirac. Questo caso è uno dei primi ad essere trattati e risolti nella letteratura sull'argomento. Naturalmente, in questo caso, il *dwell time* sarà nullo, ma si ha:^{#8}

$$\Delta\tau_R^\varphi = \Delta\tau_T^\varphi = T(k) \frac{V_0 d}{mv^3},$$

con:

$$T(k) = \frac{1}{1 + \left(\frac{V_0 d}{\hbar k}\right)^2}.$$

Il tempo di tunnelling non può quindi che provenire dal termine di autointerferenza.

I.9) Generalizzazione del dwell time.

Come già accennato non tutti gli autori concordano sull'importanza fin qui assegnata al *dwell time* anche sulla base, ma non solo, della (I.0.1). Tale relazione, infatti, invocata come conseguenza del principio di sovrapposizione, e della mutua esclusività degli eventi di trasmissione o di riflessione, implicherebbe:

$$\begin{aligned}\int_{\text{Barriera}} |\psi(x, k)|^2 dx &= j(|T(K)|^2 \tau_T + |R(k)|^2 \tau_R) = \\ &= |T(K)|^2 j \tau_T + |R(k)|^2 j \tau_R\end{aligned}\tag{I.9.0}$$

^{0#8} In questo caso d ha solo la funzione di un parametro, in quanto la δ di Dirac è costruita come limite di barriere sempre più strette ed alte ma di area costante $V_0 d$.

che quantomeno impone, a priori, $\tau_T = \tau_R$, indipendentemente dalla forma della barriera di potenziale.

Oltre a ciò, la (I.0.0) viene ricavata da Büttiker[21] nel 1983 seguendo un metodo criticato, invece, da Olkhovsky e Recami.[6, 28, 29] Infatti pur partendo da un'espressione in cui appaiono esplicitamente le $\psi(x, t)$, nella definizione non si terrebbe realmente in conto della reale evoluzione temporale del pacchetto. Inoltre, a parte la relazione (I.0.1) la suddetta definizione non suggerisce nessun metodo per la separazione dei tempi dei diversi processi. Per questo motivo, nel tentativo di separare questi tempi, Olkhovsky e Recami introducono preliminarmente le seguenti definizioni relative ai tempi di trasmissione e di riflessione:

$$\begin{aligned}\overline{\tau_T} &= \overline{t(x_f)_T^{\text{III}}} - \overline{t(x_i)_{\text{in}}} = \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dt t J_T^{\text{III}}(x_f, t)}{\int_{-\infty}^{\infty} dt J_T^{\text{III}}(x_f, t)} - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dt t J_{\text{in}}(x_i, t)}{\int_{-\infty}^{\infty} dt J_{\text{in}}(x_i, t)} = \\ &= \frac{\int_0^{\infty} dE v |g(E) T|^2 \tau_T^{Ph}(x_i, x_f; E)}{\int_0^{\infty} dE v |g(E) T|^2} = \\ &= (x_f - x_i) < v^{-1} >_T + < \delta \tau_T >_T\end{aligned}\tag{I.9.0a}$$

e

$$\begin{aligned}\overline{\tau_R} &= \overline{t(x_f)_R^{\text{I}}} - \overline{t(x_i)_{\text{in}}} = \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dt t J_R^{\text{I}}(x_f, t)}{\int_{-\infty}^{\infty} dt J_R^{\text{I}}(x_f, t)} - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dt t J_{\text{in}}(x_i, t)}{\int_{-\infty}^{\infty} dt J_{\text{in}}(x_i, t)} = \\ &= \frac{\int_0^{\infty} dE v |g(E) R|^2 \tau_R^{Ph}(x_i, x_f; E)}{\int_0^{\infty} dE v |g(E) R|^2} = \\ &= (x_f - x_i) < v^{-1} >_R + < \delta \tau_R >_R\end{aligned}\tag{I.9.0b}$$

Infatti, poiché $J(x, t)dt$ rappresenta la densità di probabilità che una particella passi per il punto x , nell'intervallo di tempo $(t, t+dt)$, per determinare il tempo medio in cui un pacchetto d'onda $\Psi(x, t)$ passa per il punto x , dobbiamo fare la media della variabile t pesata attraverso:

$$w(x, t) = \frac{J(x, t)}{\int_{-\infty}^{\infty} J(x, t) dt}.\tag{I.9.1}$$

Subito dopo, però, gli stessi autori[6] notano che le definizioni (I.9.0) sono valide solo quando i pacchetti d'onda incidente e trasmesso sono completamente separati sia spazialmente che temporalmente. Infatti quando x_i ed x_f non sono abbastanza lontani dagli estremi della barriera è possibile avere effetti di interferenza tra la parte incidente e quella riflessa.

Inoltre, la densità di corrente $J(x, t)$ può, in genere, cambiare segno durante l'evoluzione temporale del pacchetto (per esempio quando il picco dell'onda incidente raggiunge la barriera),

cosicché gli integrali $\int_{-\infty}^{\infty} dt t J(x, t)$, che rappresentano la somma algebrica di quantità (flussi) positive e negative, e le densità di probabilità $w(x, t)$, potranno non essere più definiti positivi.

In tal caso, ciascuna densità di probabilità acquista un significato fisico immediato solo durante gli intervalli di tempo in cui la corrispondente densità di corrente non cambia direzione: occorre dunque spezzare l'integrale precedente in vari integrali, ciascuno dei quali sia considerato su un intervallo di tempo in cui il segno di $J(x, t)$ sia solo positivo o solo negativo. In tal modo si otterranno delle densità di probabilità tutte definite positive:

$$w_+(x, t) = \frac{J_+(x, t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} dt J_+(x, t)}$$

$$w_-(x, t) = \frac{J_-(x, t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} dt J_-(x, t)}$$

dove J_+ e J_- rappresentano, rispettivamente, i valori positivi e negativi di $J(x, t)$.

Alla luce di queste osservazioni, i due autori[6] propongono come tempi medi di trasmissione e di riflessione le seguenti espressioni:

$$\overline{\tau_T} = \overline{t(x_f)_+} - \overline{t(x_i)_+} =$$

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} dt t J_+(x_f, t)}{\int_{-\infty}^{\infty} dt J_+(x_f, t)} - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dt t J_+(x_i, t)}{\int_{-\infty}^{\infty} dt J_+(x_i, t)} \quad (I.9.2a)$$

e

$$\overline{\tau_R} = \overline{t(x_i)_-} - \overline{t(x_i)_+} =$$

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} dt t J_-(x_i, t)}{\int_{-\infty}^{\infty} dt J_-(x_i, t)} - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dt t J_+(x_i, t)}{\int_{-\infty}^{\infty} dt J_+(x_i, t)} \quad (I.9.2b)$$

Prima di passare oltre, partendo dall'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} = 0,$$

e attraverso l'interpretazione probabilistica standard della $\rho(x, t)$, vogliamo dimostrare come le $w_{\pm}(x, t)$ appena definite corrispondano proprio alla probabilità che la nostra particella, muovendosi in avanti o venendo indietro, passi nell'intervallo di tempo $(t, t + dt)$ per il punto x .

In ogni intervallo di tempo in cui $J = J_+$ o $J = J_-$, possiamo scrivere l'equazione di continuità applicandola a J_{\pm} [l'equazione di continuità è in ogni caso valida sempre]:

$$\frac{\partial \rho_>(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial J_+(x, t)}{\partial x} \quad (I.9.3a)$$

$$\frac{\partial \rho_<(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial J_-(x, t)}{\partial x}, \quad (I.9.3b)$$

ottenendo così le due quantità, $\partial\rho_>(x,t)/\partial t$ e $\partial\rho_<(x,t)/\partial t$. Integrando quindi rispetto al tempo in un intervallo $(-\infty, t)$ possiamo definire:

$$\rho_>(x, t) = - \int_{-\infty}^t \frac{\partial J_+(x, t')}{\partial x} dt' \quad (I.9.4a)$$

$$\rho_<(x, t) = - \int_{-\infty}^t \frac{\partial J_-(x, t')}{\partial x} dt' \quad (I.9.4b)$$

Imponiamo anche la condizione che $\rho_>(x, -\infty) = 0$, $\rho_<(x, -\infty) = 0$: supponiamo cioè che inizialmente la particella (o il pacchetto d'onda) sia infinitamente lontano da x . Integrando nuovamente rispetto ad x otteniamo altre due quantità che indicheremo con $N_>(x, \infty; t)$, $N_<(-\infty, x; t)$ e per le quali si ha:

$$N_>(x, \infty; t) = \int_x^\infty \rho_>(x', t) dx' = \int_{-\infty}^t J_+(x, t') dt' > 0, \quad (I.9.5a)$$

$$N_<(-\infty, x; t) = \int_{-\infty}^x \rho_<(x', t) dx' = \int_{-\infty}^t J_-(x, t') dt' > 0. \quad (I.9.5b)$$

Queste ultime due espressioni ci daranno la probabilità che la nostra particella, muovendosi in avanti o all'indietro, si trovi, al tempo t , rispettivamente a destra o a sinistra del punto x in funzione delle densità di corrente $J_\pm(x, t)$.

Notiamo che le condizioni $\rho_>(x, -\infty) = 0$, $\rho_<(x, -\infty) = 0$ che avevamo imposto prima di integrare equivalgono ora a $J_\pm(-\infty, t) = 0$.

Finalmente, differenziando nuovamente le (I.9.5), questa volta rispetto al tempo, abbiamo:

$$J_+(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} N_>(x, \infty; t), > 0 \quad (I.9.6a)$$

$$J_-(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} N_<(-\infty, x; t), > 0 \quad (I.9.6b)$$

e dunque:

$$w_+(x, t) = \frac{\frac{\partial}{\partial t} N_>(x, \infty; t)}{N_>(x, -\infty, \infty)} \quad (I.9.7a)$$

$$w_-(x, t) = \frac{\frac{\partial}{\partial t} N_<(-\infty, x; t)}{N_<(-\infty, x, \infty)}. \quad (I.9.7b)$$

Tali relazioni bastano a giustificare la suddetta interpretazione probabilistica delle $w_+(x, t)$ e $w_-(x, t)$.

A questo punto possiamo definire il *valor medio* dell'istante in cui la particella passa per il punto x muovendosi nella direzione positiva o negativa dell'asse. Saranno dunque:

$$\overline{t_+(x)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t J_+(x, t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} J_+(x, t) dt} \quad (I.9.8a)$$

$$\overline{t_-(x)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t J_-(x, t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} J_-(x, t) dt} \quad (I.9.8b)$$

Abbiamo ormai inoltre tutti i mezzi per poter definire anche le *varianze* delle distribuzioni relative ai suddetti tempi, e saranno:

$$\sigma^2(t_+(x)) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 J_+(x, t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} J_+(x, t) dt} - (\overline{t_+(x)})^2 \quad (I.9.9a)$$

$$\sigma^2(t_-(x)) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 J_-(x, t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} J_-(x, t) dt} - (\overline{t_-(x)})^2 \quad (I.9.9b)$$

Siamo quindi riusciti a costruire un formalismo che ci consente di ricavare sia i valori medi, che le varianze (o eventuali altri momenti), relativi alle “distribuzioni temporali” di tutti i possibili processi relativi al tunnelling, nel caso unidimensionale. Le stesse definizioni, comunque, sono estendibili a qualunque altro processo di collisione anche diverso dal tunnelling e con qualsiasi tipo di potenziale.

Come abbiamo già visto, per i tempi di tunnelling e di riflessione abbiamo:

$$\overline{\tau_T}(x_i, x_f) = \overline{t(x_f)}_+ - \overline{t(x_i)}_+ = \quad (I.9.2a)$$

con $-\infty < x_i < 0$ e $d < x_f < \infty$ e, in base alle (I.9.9):

$$\sigma^2(\tau_T(x_i, x_f)) = \sigma^2(t_+(x_f)) + \sigma^2(t_+(x_i)). \quad (I.9.10)$$

Nel caso inoltre $x_i = 0$, $x_f = d$, abbiamo:

$$\begin{cases} \overline{\tau_{\text{Tun}}}(0, d) = \overline{t(d)}_+ - \overline{t(0)}_+ \\ \sigma^2(\tau_T(0, d)) = \sigma^2(t_+(d)) + \sigma^2(t_+(0)). \end{cases} \quad (I.9.11)$$

Prendendo per esempio $x_i = 0$ e $0 < x_f < d$, possiamo ricavare tempi di penetramento all'interno della barriera come:

$$\overline{\tau_{\text{Pen}}}(0, x_f) = \overline{t(x_f)}_+ - \overline{t(0)}_+ \quad (I.9.12)$$

o, per $0 < x < d$:

$$\overline{\tau_{\text{Ret}}}(x, x) = \overline{t(x)}_- - \overline{t(x)}_+ \quad (I.9.13)$$

e, per $-\infty < x_i < d$:

$$\overline{\tau_R}(X_i, x_i) = \overline{t(x_i)}_+ - \overline{t(X_i)}_+. \quad (I.9.14)$$

Infine riesaminiamo, in base alla definizioni qui riportate, quelle precedentemente date di *phase time* e *dwell time*.

Per quanto riguarda il primo, salta per l'ennesima volta fuori il suo carattere puramente asintotico. Infatti, essendo questo ricavato in un contesto esplicitamente stazionario l'unica situazione in cui gli si può dare un senso fisico in base ai risultati qui riportati è quando $x_i \rightarrow \infty$, quando cioè, $J_+(x, t)$ è la densità di corrente del pacchetto iniziale in assoluta assenza di interferenza, tra la parte trasmessa e quella riflessa, dovuta alla onde riflesse. Analogamente, il dwell time, rappresentato dall'espressione equivalente:[30, 31]

$$\overline{\tau}^D(x_i, x_f) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} t J(x_f, t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} t J(x_i, t) dt \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} J_{\text{in}}(x_i, t) dt \right]^{-1},$$

con $-\infty < x_i < 0$, and $x_f > d$, non è in genere fisicamente significativo: infatti il peso nelle medie temporali è definito positivo, e normalizzato ad 1, solamente nei rari casi in cui $x_i \rightarrow -\infty$ and $J_{\text{in}} = J_{\text{III}}$ (i.e., quando la barriera è trasparente).

I.10) Tempi di penetrazione e di ritorno: risultati numerici.

Le (I.9.2) e le (I.9.11-14) non consentono un calcolo analitico agevole per ricavare delle espresioni per i tempi di tunnelling (penetrazione, ritorno e riflessione), nemmeno nel caso alquanto semplice di barriera rettangolare.

Presentiamo dunque i risultati di alcuni calcoli numerici relativi alla durata media di vari processi di penetrazione e ritorno di pacchetti gaussiani *all'interno* di una barriera rettangolare, svolti da Olkhovsky et al. in un recente articolo[29]. Tali calcoli, comunque, confermano l'apparire dell'*effetto Hartman* e, in base a verifiche indirette, risultano, secondo gli autori, abbastanza in accordo con i dati sperimentali di Colonia, Berkeley, Firenze, Vienna.

Figura I-6.

Didascalia della Fig.I-6:

{6a) Andamento del tempo di penetrazione medio, $\overline{\tau}_{\text{Pen}}(0, x)$ (espresso in secondi), in funzione della lunghezza di penetrazione $x_f = x$ (espressa in in Ångstrom) per una barriera rettangolare di ampiezza $d = 5 \text{ Å}$, con $\Delta k = 0.02 \text{ Å}^{-1}$ (linea tratteggiata) e $\Delta k = 0.01 \text{ Å}^{-1}$ (linea continua). Vale la pena di notare che $\overline{\tau}_{\text{Pen}}(0, x)$ cresce rapidamente per i primi Ångstrom ($\sim 2.5 \text{ Å}$) iniziali, e tende poi ad un valore di saturazione. Questo sembra confermare l'esistenza del cosiddetto "effetto Hartman".

6b) Come in 6a) con $\Delta k = 0.01 \text{ Å}^{-1}$, ma con una barriera di spessore doppio $d = 10 \text{ Å}$. Osserviamo che i valori numerici del tempo di tunnelling totale $\overline{\tau}_{\text{Tun}}(0, d)$ restano praticamente inalterati quando si passa da $d = 5 \text{ Å}$ a $d = 10 \text{ Å}$, ad ulteriore conferma dell'apparire dell'effetto Hartman.}

Ricodiamo che, in base alle notazioni precedentemente riportate, è

$$\Psi_{\text{in}}(x, t) = \int_0^\infty C f(k - \bar{k}) \exp[ikx - iEt/\hbar] dk$$

dove:

$$f(k - \bar{k}) = e^{-\frac{(k-\bar{k})^2}{2(\Delta k)^2}},$$

$E = \hbar^2 k^2 / 2m$, C è una costante di normalizzazione ed m è in questo caso la massa dell'elettrone. Le lunghezze di penetrazione saranno espresse in Ångstroms, e il tempo di penetrazione in secondi.

In Fig.I-6a sono riportati i grafici di $\overline{\tau_{\text{Pen}}}(0, x)$, $0 < x < d$, corrispondenti a $d = 5$ Å, per $\Delta k = 0.02$ e 0.01 Å⁻¹. Come si può vedere il tempo di penetrazione $\overline{\tau_{\text{Pen}}}(0, x)$ tende sempre ad un valore di massimo di *saturazione*.

In Fig.6b mostriamo invece il grafico corrispondente a $d = 10$ Å, $\Delta k = 0.01$ Å⁻¹. È interessante notare che, a parità di Δk , $\overline{\tau_{\text{Pen}}}$ è praticamente lo stesso, sia per $d = 5$ che per $d = 10$ Å, un risultato questo che conferma ancora una volta l'apparire del cosiddetto *effetto Hartman*. Risultati analoghi sono stati ottenuti anche per $d > 10$ Å, facendo variare il parametro Δk tra 0.005 e le energie \overline{E} nel range da 1 a 10 eV.

Figura I-7.

Didascalia della Fig.I-7:

{Andamento di $\overline{\tau_{\text{Pen}}}(0, x)$ (espresso in secondi) in funzione di x (in Ångstroms), relativo al tunnelling attraverso una barriera di spessore $d = 5$ Å e per vari valori di \overline{E} e di Δk : curva 1: $\Delta k = 0.02$ Å⁻¹ e $\overline{E} = 2.5$ eV; curva 2: $\Delta k = 0.02$ Å⁻¹ e $\overline{E} = 5.0$ eV; curva 3: $\Delta k = 0.02$ Å⁻¹ e $\overline{E} = 7.5$ eV; curva 4: $\Delta k = 0.04$ Å⁻¹ e $\overline{E} = 5.0$ eV.}

Nelle Figg.I-6, I-7, I-8 sono riportati gli andamenti delle durate medie per i processi di penetrazione e ritorno in funzione della lunghezza di penetrazione (con $x_i = 0$ e $0 \leq x_f = x \leq d$), per barriere di altezza $V_0 = 10$ eV e ampiezza $d = 5$ Å o in alcuni casi 10 Å. In particolare:

— In Fig.I-6, sono riportati i grafici di $\overline{\tau_{\text{Pen}}}(0, x)$ corrispondenti a diversi valori dell'energia cinetica media: $\overline{E} = 2.5$ eV, 5 eV e 7.5 eV, $\Delta k = 0.02$ Å⁻¹ (curve 1, 2 e 3); $\overline{E} = 5$ eV, $\Delta k = 0.04$ Å⁻¹ (curva 4);

per tutti e quattro i casi è $d = 5$ Å.

— In Fig.I-7 mostriamo i grafici di $\overline{\tau_{\text{Pen}}}(0, x)$ corrispondenti a: $d = 5$ Å, con $\Delta k = 0.02$ Å⁻¹ e 0.04 Å⁻¹ (curve 1 and 2); $d = 10$ Å, con $\Delta k = 0.02$ Å⁻¹ e 0.04 Å⁻¹ (curve 3 e 4); dove l'energia cinetica media \overline{E} è 5 eV, e cioè metà dell'energia di barriera V_0 .

— Infine in Fig.I-8 mostriamo alcuni grafici di $\overline{\tau_{\text{Ret}}}(x, x)$. Le curve 1, 2 e 3 corrispondono rispettivamente a: $\overline{E} = 2.5$ eV, 5 eV e 7.5 eV, per $\Delta k = 0.02$ Å⁻¹ e $d = 5$ Å;

le curve 4, 5 and 6 corrispondono invece a: $\overline{E} = 2.5$ eV, 5 eV e 7.5 eV, per $\Delta k = 0.04$ Å⁻¹ e

$d = 5\text{\AA}$;

mentre le curve 7, 8 e 9 corrispondono rispettivamente a: $\Delta k = 0.02\text{\AA}^{-1}$ e 0.04\AA^{-1} , $\overline{E} = 5$ eV, $d = 10\text{\AA}$.

Figura I-8.

Didascalia della Fig.I-8:

{Andamento di $\overline{\tau_{\text{Pen}}}(0, x)$ (in secondi) in funzione di x (in Ångstroms) per $\overline{E} = 5$ eV, e per vari valori di d e Δk : curva 1: $d = 5\text{\AA}$, $\Delta k = 0.02\text{\AA}^{-1}$; curva 2: $d = 5\text{\AA}$, $\Delta k = 0.04\text{\AA}^{-1}$; curva 3: $d = 10\text{\AA}$, $\Delta k = 0.02\text{\AA}^{-1}$; curva 4: $d = 10\text{\AA}$, $\Delta k = 0.04\text{\AA}^{-1}$.}

Riguardo al modo in cui sono stati effettuati questi calcoli, gli autori fanno osservare che l'integrazione su dt è stata eseguita usando l'intervallo temporale $[-10^{-13}, +10^{-13}]$ s, simmetrico rispetto a $t = 0$. Tale intervallo risulta di tre ordini di grandezza maggiore dell'estensione temporale del pacchetto d'onde che ricordiamo essere dell'ordine di $1/(\bar{v} \Delta k) = (\Delta k \sqrt{2\overline{E}/m})^{-1} \sim 10^{-16}$ s.

Sottolineiamo che ciò equivale a considerare l'evoluzione del pacchetto d'onda attraverso un intervallo temporale $[-\infty, +\infty]$, e non invece come se questo iniziasse a evolversi ad un certo istante t finito. Tutto ciò in accordo con le relazioni $J_{\pm}(-\infty, t) = 0$ o equivalentemente $\rho_{<}(x, -\infty) = 0$. Aggiungiamo inoltre che il pacchetto è costruito in modo tale da arrivare con il centroide in x_0 al tempo $t = 0$.

Figura I-9.

Didascalia della Fig.I-9:

{Andamento di $\overline{\tau_{\text{Ret}}}(x, x)$ (in secondi) in funzione di x (in Ångstrom) per diversi valori di d , \overline{E} e Δk : curva 1: $d = 5\text{\AA}$, $\overline{E} = 2.5$ eV e $\Delta k = 0.02\text{\AA}^{-1}$; curva 2: $d = 5\text{\AA}$, $\overline{E} = 5.0$ eV e $\Delta k = 0.02\text{\AA}^{-1}$; curva 3: $d = 5\text{\AA}$, $\overline{E} = 7.5$ eV e $\Delta k = 0.02\text{\AA}^{-1}$; curva 4: $d = 5\text{\AA}$, $\overline{E} = 2.5$ eV e $\Delta k = 0.02\text{\AA}^{-1}$; curva 5: $d = 5\text{\AA}$, $\overline{E} = 5.0$ eV e $\Delta k = 0.02\text{\AA}^{-1}$; curva 6: $d = 5\text{\AA}$, $\overline{E} = 7.5$ eV e $\Delta k = 0.02\text{\AA}^{-1}$; curva 7: $d = 5\text{\AA}$, $\overline{E} = 5.0$ eV e $\Delta k = 0.02\text{\AA}^{-1}$; curva 8: $d = 5\text{\AA}$, $\overline{E} = 5.0$ eV e $\Delta k = 0.02\text{\AA}^{-1}$.}

Dalle suddette Figure I-7)–I-9) si può vedere che:

1) la durata media del processo di tunnelling $\overline{\tau_{\text{Tun}}}(0, d)$ non dipende dalla profondità d della barriera (“effetto Hartman”);

2) la quantità $\overline{\tau_{\text{Tun}}}(0, d)$ decresce all'aumentare dell'energia, come nel caso dei *tempo di fase estrapolato*;

3) Il valore della durata del tempo di penetrazione aumenta rapidamente soprattutto nella parte iniziale della barriera, in prossimità cioè del punto $x = 0$;

4) $\overline{\tau_{\text{Pen}}}(0, x)$ tende a un valore di saturazione della parte finale della barriera, cioè per $x \rightarrow d$.

Per quanto riguarda gli effetti riportati nei punti 3) e 4), secondo gli autori, sarebbero causati dall'interferenza tra le onde iniziali che penetrano nella barriera e le onde che tornano indietro (sempre dentro la barriera) e la cui sovrapposizione produce i flussi J_+ e J_- . Si vedano anche le illustrazioni (in particolare Fig.3, pag.351) in ref.[6].

Infatti, essendo nella parte iniziale della barriera il pacchetto d'onda di ritorno abbastanza grande, ciò che accade è che il suo flusso estingue sostanzialmente buona parte di quello entrante del pacchetto incidente.

All'aumentare di x , però, il pacchetto d'onde di ritorno va a zero più velocemente di quello entrante: ciò provocherebbe un aumento della durata media del processo di penetrazione $\overline{\tau_{\text{Pen}}}(0, x)$, facendo crescere velocemente tale durata, soprattutto nella zona iniziale della barriera. Nella regione finale della barriera il suo aumento svanisce rapidamente e si ha l'effetto inverso.

Infine, in connessione con i grafici di $\overline{\tau_{\text{Ret}}}(x, x)$ in funzione di x , mostrati in Fig.I-9, osserviamo che:

5) la durata media di riflessione $\overline{\tau_{\text{R}}}(0, 0) = \overline{\tau_{\text{Ret}}}(0, 0)$ non dipende dall'ampiezza d della barriera;

6) in corrispondenza della regione della barriera tra 0 e, circa, $0.6d$ il valore di $\overline{\tau_{\text{Ret}}}(0, x)$ è quasi costante;

7) il suo valore aumenta con x solamente nella regione della barriera vicino ad $x = d$, anche se come sottolineano gli autori i calcoli relativi a tale regione non sono molto accurati a causa del fatto che la quantità $\int_{-\infty}^{\infty} J_-(x, t) dt$ assume valori molto piccoli.

Notiamo quindi che il punto 5), previsto, come il punto 1) per particelle quasi-monocromatiche da Dumont e Marchioro,[32] risulta in accordo con i dati ottenuti da Steinberg et al.[33] per pacchetti d'onde arbitrari. Come prima anche i punti 6) e 7) possono essere spiegati da fenomeni di interferenza all'interno della barriera: infatti, se vicino ad $x = d$ il pacchetto d'onde di ritorno iniziale è smorzato quasi totalmente dal pacchetto d'onda incidente iniziale, allora resterà solamente una parte trascurabile della sua coda posteriore (fatta dalle componenti con velocità minori).

Al diminuire di x ($x \rightarrow 0$) la parte non smorzata del pacchetto di ritorno sembra diventare sempre più grande (riacquistando le componenti più rapide) cosicché la differenza $\overline{\tau_{\text{Ret}}}(0, x) - \overline{\tau_{\text{Pen}}}(0, x)$ rimane, con buona approssimazione, costante. Inoltre l'interferenza tra le onde incidenti e riflesse nei punti $x \leq 0$ costituisce in effetti un fenomeno ritardante cosicché $\overline{t_-(x=0)}$ è più grande di $\overline{\tau_{\text{R}}}(x=0)$, il che può spiegare i valori più grandi di $\overline{\tau_{\text{R}}}(x=0, x=0)$ rispetto a $\overline{\tau_{\text{Tun}}}(x=0, x=a)$.

Parte II: ESPERIMENTI.

II.0) Equivalenza ottica del tunnelling.

Come già accennato, varie conferme sperimentali dell'*effetto Hartman* si sono recentemente avute in seguito ad una serie di misure effettuate a Colonia[34], Berkeley[35], Firenze[36], e Vienna[37].

Tali misure, però, sono state eseguite sui tempi di trasmissione di microonde e fotoni, sfruttando la propagazione di modi evanescenti all'interno di guide d'onda sotto la frequenza di cut-off, nel primo caso, e la riflessione frustrata, nel secondo.

Notiamo infatti che, malgrado in passato siano state avanzate numerose proposte di esperimenti da effettuare direttamente con particelle quali ad esempio elettroni, grosse difficoltà erano state incontrate dal punto di vista pratico nel realizzarli, a causa soprattutto dei tempi molto piccoli coinvolti in tali processi di tunnelling.

Per una giunzione Josephson, ad esempio, tali tempi risultano essere di qualche decina di *femto-secondi*, e possono scendere all'ordine del fs in altri dispositivi a stato solido.

Nel caso di sistemi ottici, invece, tali tempi sono già dell'ordine di qualche ps, per frequenze nella regione del visibile, e raggiungono il ns in alcuni degli esperimenti compiuti a Firenze ed a Colonia, con microonde.

Pur senza prendere qui in rassegna tali esperimenti, oramai noti e famosi[38], ed i risultati da questi ottenuti, occupiamoci dell'equivalenza tra trasmissione di modi elettromagnetici evanescenti e tunnelling di particelle, in particolare nel caso delle guide d'onda. Consideriamo una particella di massa m ed energia cinetica $E = \hbar^2 k^2 / 2m$. Nel caso (unidimensionale) di attraversamento di un potenziale uniforme V_0 , l'equazione di *Schrödinger* per tale particella sarà:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) \psi = 0. \quad (II.0.0)$$

Posto allora:

$$\kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0), \quad (II.0.1)$$

la (II.0.0) risulta formalmente identica all'equazione di *Helmholtz* per la componente scalare relativa al campo elettrico, o a quello magnetico, di un campo (e.m.) che si propaghi in un mezzo dispersivo:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \kappa^2 \psi = 0, \quad (II.0.2)$$

dove in questo caso:

$$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda_m} = \frac{2\pi}{\lambda} n,$$

λ_m è la lunghezza d'onda all'interno del mezzo, λ è la lunghezza d'onda nel vuoto, e n è l'indice di rifrazione del mezzo in cui il campo si propaga.

Il confronto tra le due equazioni suggerisce la sostituzione:

$$\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)} \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}n.$$

Nel caso di una guida d'onda rettangolare di dimensioni $a \times b$ ($a < b$), e con pareti perfettamente conduttrici, sappiamo che:

$$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2b}\right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \quad (II.0.3)$$

dove $\lambda_c = 2b$ è la lunghezza d'onda di *cut-off* al di sopra della quale il termine sotto radice diviene negativo e, di conseguenza, κ immaginario.

Poiché inoltre $\lambda = c/\nu = 2\pi c/\omega$, abbiamo:

$$\kappa = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{b^2}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} \quad (II.0.4)$$

con $\omega_c = \pi c/b$ ($\nu_c = c/2b$), che ci dà a sua volta la frequenza di *cut-off* al di sotto della quale κ diviene immaginario.

Notiamo che la relazione di dispersione nel caso di guida d'onda rettangolare è sorprendentemente uguale[39] (si vedano anche le “Feynman Lectures”[7]) a quella di una particella relativistica quando facciamo la sostituzione:

$$\frac{\pi}{b} = \frac{\omega_c}{c} = \frac{mc}{\hbar}$$

infatti, moltiplicando la (II.0.4) per \hbar abbiamo:

$$\hbar\kappa = \sqrt{\frac{(\hbar\omega)^2}{c^2} - \frac{(2\hbar\pi)^2}{b^2}} \rightarrow p^2 = \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - mc^2}$$

Onde evitare confusione, precisiamo che qui il confronto lo stiamo facendo tra l'equazione di Helmholtz, che è relativistica e classica (perché ricavata dalle equazioni di Maxwell), e l'equazione di Schrödinger, quantistica e *non* relativistica.

Proprio questo è, inoltre, uno dei vantaggi di usare campi elettromagnetici anziché particelle. Torniamo, dunque, al suddetto confronto tra la (II.0.0) e la (II.0.2). Differenziando la (II.0.1) e la (II.0.4), otteniamo:

$$v_{\text{gruppo}}^{\text{particella}} = \frac{d\omega}{d\kappa} = \frac{\hbar}{m}\kappa$$

$$v_{\text{gruppo}}^{\text{c.em}} = \frac{d\omega}{d\kappa} = \frac{c^2}{\omega}\kappa.$$

Attraverso la sostituzione:

$$\frac{\hbar}{m} \rightarrow \frac{c^2}{\omega} = \frac{c}{2\pi\nu}, \quad (II.0.6)$$

possiamo sempre adattare i risultati elettromagnetici, nel caso di trasmissione di microonde in una guida d'onda, a quello quantistico, del moto unidimensionale di una particella in un

potenziale uniforme.^{#9} . In entrambi i casi infatti le soluzioni delle due equazioni saranno date da combinazioni lineari delle funzioni d'onda:

$$\psi(x, t) = e^{\pm i\kappa x} e^{i\omega t}$$

Inoltre, quando l'energia della particella risulta minore di V_0 , o quando nel caso elettromagnetico la pulsazione ω diviene minore di ω_c , κ diviene immaginario e le funzioni d'onda divengono degli esponenziali decrescenti^{#10} della forma $e^{-|\kappa|x}$ (onde evanescenti).

Notiamo dunque che il campo (o equivalentemente la funzione d'onda della particella) penetra ugualmente all'interno della zona sotto *cut-off* (o classicamente proibita, per le particelle) almeno per una distanza dell'ordine di $|\kappa|^{-1}$.

Ovviamente resta il fatto che, nonostante le analogie formali, vi sono delle differenze fisiche tra il tunnelling di elettroni e la propagazione guidata di microonde sotto *cut-off*. Infatti, come già detto, l'equazione di Helmholtz (per le onde) e l'equazione di Schrödinger (per elettroni) sono sì, sostanzialmente, la stessa equazione, ma mentre nel primo caso ciò che si propaga è effettivamente una componente del campo (e quindi è il campo stesso), nel secondo caso si tratta della funzione d'onda della particella.

Tuttavia, trattandosi in ambo i casi dell'evoluzione di pacchetti d'onda, nulla ci vieta di interpretare i risultati degli esperimenti su microonde come delle vere e proprie “simulazioni fisiche” del tunnelling di elettroni, anche perché il fatto che i risultati di tali simulazioni[34 – 38] riproducano abbastanza bene le previsioni quantistiche conferma l'equivalenza tra i due casi.

Piú sottile è la circostanza che nel caso dipendente dal tempo le equazioni di Schroedinger (in presenza di barriera) e l'equazione di Helmholtz (per onde elettromagnetiche in guida d'onda) non sono piú matematicamente equivalenti, dato che la derivata temporale é del primo ordine in un caso, e del secondo ordine nell'altro caso. Ciononostante, si può far vedere[40] che esse ammettono ancora classi di soluzioni analoghe, differenti solo per le loro proprietà di spreading.

II.1) Misure del gruppo di Colonia.

Riportiamo ora i risultati di alcune delle misure eseguite a Colonia dal gruppo di Nimtz, Enders, et al.[34], effettuate sulla trasmissione di microonde all'interno di una guida d'onda, al di sotto della *frequenza di cut-off*.

Figura II-1.

Didascalia della Fig.II-1.:

{Configurazioni sperimentali del gruppo di Colonia.}

^{0#9} Notiamo che la (II.0.6) equivale alla relazione $\hbar\omega = mc^2$

^{0#10} Le soluzioni del tipo $e^{|\kappa|x}$, per motivi fisici, si riferiscono al set-up sperimentale opposto.

Piú precisamente, sono state utilizzate due guide d'onda rettangolari (ved. Fig.II.1), la prima delle quali, di dimensioni $10.16 \times 22.86 \text{ mm}^2$ (banda X), è stata sempre utilizzata a frequenze sempre superiori a quelle di cut-off, di 6.56 GHz.

A metà di questa era inserita una seconda guida d'onda, di dimensioni $7.90 \times 15.80 \text{ mm}^2$ (banda Ku), la cui frequenza di cut-off era di 9.49 GHz.

Onde evitare eventuali errori sistematici provenienti dal restringimento dovuto alla connessione delle due guide, o all'interferenza tra la linea di "iniezione" e di ricezione del segnale con la guida d'onda di banda X , gli autori hanno utilizzato una speciale tecnica di calibrazione (calibrazione LRM). [Piú recentemente è apparso un nuovo lavoro degli stessi autori in cui l'apparato sperimentale è stato leggermente variato; infatti, per evitare eventuali problemi dovuti alla strozzatura nel passaggio tra le due guide di banda X e Ku , anziché usare una seconda guida per creare la zona di evanescenza, sono state inserite all'interno di questa degli strati di materiale con indice di rifrazione diverso, sfruttando così la riflessione frustrata, come nel caso degli esperimenti con fotoni: i risultati di tali nuove misure concordano perfettamente con quelli qui riportati.]

Figura II-2.

Didascalia della Fig.II-2:

{Ritardi di fase sperimentali del coefficiente di trasmissione totale $T(\nu)$, in funzione della frequenza, per quattro diverse lunghezze della guida d'onda centrale di banda Ku .}

Una prima serie di misure è stata fatta nel dominio di frequenza, misurando cioè il coefficiente di trasmissione totale $T(\nu)$, al variare della frequenza portante di un certo impulso (che considereremo piú avanti).

La quantità $T(\nu)$ include quindi, in questo caso, anche la variazione di fase causata dall'attraversamento della guida di banda Ku .

In effetti, le misure della fase e dell'ampiezza sono state eseguite separatamente, anche se contemporaneamente.

Le misure sono state effettuate nell'intervallo di frequenze: 8.2—9.2 GHz, appena 300 MHz al di sotto della frequenza di cut-off. Tale intervallo è stato diviso in 801 punti di misura: la differenza di frequenza tra due punti di misura successivi essendo di 1.25 MHz.

In Fig.II.2 sono riportati i ritardi di fase ottenuti per quattro differenti lunghezze della guida d'onda centrale; piú esattamente $L = 40, 60, 80, 100 \text{ mm}$.

È piú che evidente che i suddetti ritardi di fase sono uguali per tutte e quattro le lunghezze con un'accuratezza di ± 1 grado. Solo alle frequenze piú piccole appaiono delle deviazioni statistiche maggiori.

Figura II-3.

Didascalia della Figura II-3:

{In figura sono riportati l'impulso di riferimento ($L=0$ — linea punteggiata); l'impulso trasmesso

attraverso una “barriera” di 100 mm (linea continua), con un ritardo di circa 130 ps; l’impulso trasmesso lungo la stessa distanza di 100 mm, ma attraverso una guida d’onda di banda X (linea tratteggiata).}

Va però notato che a basse frequenze l’attenuazione del segnale è tale da far scendere la precisione degli strumenti di misura. Inoltre, anche nel vuoto un’onda elettromagnetica del genere di quelle usate presenta normalmente una variazione di fase dell’ordine di 1 grado, dopo aver viaggiato per una distanza di appena 0.1 mm. L’indipendenza dello sfasamento dalla lunghezza delle guide intermedie dimostra che questo è causato essenzialmente solo dalle condizioni al contorno sulle due facce (d’ingresso e di uscita) della *guida d’onda* di banda Ku .

Figura II-4.

Didascalia della Fig.II-4:

{Impulso di riferimento ($L=0$), linea continua; impulsi di tutte e quattro le misure, che sono circa uguali, linee punteggiate; impulso che attraversa sempre i 100 *mm* ma in una guida di banda x al di sopra quindi della frequenza di cut-off, linea tratteggiata.}

Le stesse misure sono state riportate, dagli autori, nel dominio temporale attraverso un’integrazione di Fourier. Supponiamo infatti di avere un segnale $F(t)$, dato da :

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu$$

dove $f(\nu)$ è la trasformata inversa di Fourier del segnale $F(t)$. Dopo che il segnale avrà viaggiato attraverso una certa regione di spazio, la sua nuova forma, nel dominio del tempo, sarà:

$$F'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\nu) T(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu. \quad (II.1.0)$$

Dunque, una volta misurata $T(\nu)$, e conosciuta la forma del segnale iniziale, è possibile ricavare direttamente le misure dei tempi di arrivo del segnale. Gli autori adottarono come forma del segnale quella di una distribuzione di Gauss, supponendo, inoltre, che fosse possibile limitare l’integrale (II.1.0) all’intervallo di frequenze (ν_1, ν_2) , dove ν_1 e ν_2 sono le frequenze di *cut-off* delle due guide d’onda.

In Figg.II.3 e II.4 sono riportati, rinormalizzati, i risultati ottenuti trasformando le precedenti misure nel dominio del tempo (ovvero, in pratica, le $F'(t)$). Notiamo come la deformazione degli impulsi attraverso la regione della barriera sia trascurabile: non c’è quindi assolutamente bisogno di distinguere tra picco e centro di massa dell’impulso.

Figura II-5.

Didascalia della Fig.II-5:

{Involuppi delle potenze dei segnali trasmessi per due frequenze portanti: a) 8.44 GHz, b) 8.658 GHz. Le figure continue rappresentano gli involuppi dei segnali prima della barriera, attenuati di 40 dB.}

Gli stessi autori eseguono poi una seconda serie di misure direttamente sui tempi di attraversamento mediante un analizzatore di tempi. In questo caso, il segnale viene modulato in ampiezza creando un treno di impulsi, con frequenza portante ν_0 . La durata di ogni impulso è di un μs , mentre la frequenza di ripetizione di 10 kHz.

L'analisi di Fourier del segnale comprende, in questo caso, uno spettro infinito di frequenze, distribuite, comunque, intorno alla frequenza portante ν_0 . Tale frequenza va dunque scelta in modo da evitare che l'impulso trasmesso sia prevalentemente composto da frequenze al di sopra di quella di *cut-off*.

Siccome però queste frequenze non vengono attenuate, generano distorsioni abbastanza vistose del segnale. Secondo gli autori, è abbastanza semplice, verificare quando ciò accade, e mettersi in condizioni da poterlo evitare (cf. la prima delle refs.[34]).

Le misure sono state fatte in questo caso sui tempi di arrivo del fronte d'onda di ogni singolo impulso.

In Figg.II.5a e II.5b, sono rappresentati (sia in scala naturale, a sinistra, sia in scala logaritmica, a destra), in funzione di t , gli involuppi delle intensità di due impulsi, con frequenze portanti rispettivamente di 8.644 e 8.658 GHz, per uno spessore della guida centrale di 60 mm. Le linee continue invece rappresentano lo stesso involuppo per il segnale di riferimento ($L = 0$). Quest'ultimo veniva fatto passare attraverso un attenuatore di potenza a scalino, che ne riduceva l'ampiezza di 40 dB. L'errore temporale introdotto dall'attenuatore è comunque inferiore a 25 ps, indipendentemente dalla frequenza.

Come si può vedere, anche in questo caso, il tempo di attraversamento risulta indipendente dallo spessore della guida "subcritica" centrale.

Misure analoghe sono state fatte, sempre dagli stessi autori, anche per altri valori della lunghezza della guida centrale, ottenendo risultati simili a quelli delle due figure qui riportate.

Figura II-6.

Didascalia della Fig.II-6:

{Rappresentazione schematica della configurazione sperimentale nel caso della doppia barriera.}

Il caso più interessante studiato dallo stesso gruppo, infine, è stato quello dell'attraversamento di una doppia barriera (cioè di due tratti di guida d'onda subcritica). Riportiamo qui i risultati sperimentali ottenuti in questo caso, in quanto i tempi di attraversamento misurati, per bande di frequenze lontane dalle frequenze di risonanza, non solo risultano essere indipendenti dallo spessore delle due barriere, ma sono indipendenti anche dalla distanza

tra queste due.

Figura II-7.

Didascalia della Fig.II-7:

{La figura a destra riporta le intensità trasmesse di un pacchetto d'onda gaussiano in funzione del tempo nel caso di doppia barriera, per le tre configurazioni [a), b), c)] adottate. Notare l'equivalenza delle configurazioni a) e b). Sulla sinistra invece è riportato il coefficiente di trasmissione delle configurazioni a) e b). Per la configurazione b) si vedono apparire due frequenze di risonanza.}

In Fig.II.6, possiamo vedere le configurazioni sperimentali adottate:

a) dapprima, le due guide di banda Ku , entrambe di lunghezza 40 mm, sono affiancate l'una all'altra;

b) successivamente, una terza guida di banda X e lunghezza 57 mm viene posta tra le due guide sottodimensionate;

c) la guida di 57 mm viene, infine, rimossa e montata in coda alla altre, mentre le due guide di banda Ku vengono riaccostate.

Con la configurazione b) appaiono due frequenze di risonanza, rispettivamente a 6.9 e 7.6 GHz. In prossimità di tali risonanze, i tempi di tunnelling misurati dagli autori tendono al valore inverso della larghezza della risonanza.

Piú importante è la misura del tempo di attraversamento di un pacchetto gaussiano, stretto in k ($\Delta k = 0.01k$), alla frequenza *non risonante* di 7.3 GHz. I risultati di tale misura sono riportati in Fig.II.7 (grafico a sinistra). Come si può vedere, il tempo di attraversamento del segnale è uguale sia nel caso a), senza “buca di potenziale”, sia nel caso b) con una guida di banda X di 57 mm posta tra le due guide di banda Ku .

Nel caso c) il tempo di attraversamento dei 57 mm risulta di 400 ps in accordo con la velocità di gruppo all'interno della guida.

Dalla seconda delle due Figure II.7, notiamo che il coefficiente di trasmissione, lontano dalle frequenze di risonanza, assume all'incirca gli stessi valori, sia nel caso a), sia nel caso b).

I due autori passano quindi a considerare —teoricamente— il caso della misura con la configurazione b), ma con una guida intermedia lunga 1 km (invece di 57 mm). In tal caso, naturalmente, il numero delle risonanze aumenterà, diminuendo la distanza tra l'una e l'altra. Il pacchetto d'onda usato per misurare il tunnelling non risonante va dunque stretto ad una larghezza di 10^{-6} volte la frequenza centrale, onde evitare effetti di interferenza. Allora, per una frequenza portante di 10 GHz, sarebbe possibile, ad esempio, trasmettere un segnale di larghezza 10 KHz. Secondo gli autori un segnale del genere basterebbe per modulare e trasmettere anche la Sinfonia n.40 di Mozart ad una distanza di 1 km ed a velocità Superluminale. Gli autori si riferiscono a simulazioni attraverso computer[41], di cui danno però pochi dettagli. Tali computer simulations sono state pertanto rifatte con cura presso il D.M.O. della Electric

Engineering Faculty della Campinas State University, Campinas, S.P., Brasile[42], con analoghi risultati di cui si daranno i risultati altrove.

Figura II-8.

Didascalia della Fig.II-8:

{Grafici dei tempi di trasmissione calcolati da Hartman, in funzione dello spessore della barriera ($d\varepsilon$), e del numero d'onda κ' rinormalizzato a ε ($\kappa' \equiv \kappa/\varepsilon$, essendo ε il numero d'onda corrispondente all'altezza della barriera). I punti segnati rappresentano approssimativamente i dati sperimentali per un pacchetto elettromagnetico gaussiano, con frequenza centrale 8.7 GHz, nel caso di spessori della guida centrale (frequenza di *cut-off* 9.49 GHz) di 10, 40, 60, 80, 100 mm.}

Riportiamo, infine, i grafici dei tempi di tunnelling di una barriera di potenziale di spessore d ed altezza $\hbar^2\varepsilon^2/2m$, calcolati da Hartman. Nello stesso grafico sono riportati i relativi *tempi equivalenti*. I punti segnati rappresentano approssimativamente i dati sperimentali per un pacchetto elettromagnetico gaussiano, con frequenza centrale 8.7 GHz, nel caso di spessori della guida centrale (frequenza di *cut-off* 9.49 GHz) di 10, 40, 60, 80, 100 mm. Notiamo l'impressionante precisione dei dati sperimentali.

II.2) Misure del gruppo di Berkeley.

Prendiamo ora in considerazione i famosi esperimenti condotti a Berkeley dal gruppo di Chiao, Steinberg e Kwiat.

In questo caso le misure sono state svolte sfruttando la *band-gap* dovuta alle riflessioni frustrate su un materiale multistrato. Anche in questo caso, comunque, vale l'analogia tra l'equazione di Schrödinger e quella di Helmholtz, e possiamo estendere i risultati delle misure al caso di barriere di potenziale quantistiche. Quella che cambia sarà, al solito, la relazione di dispersione del mezzo e, come nel caso delle guide d'onda, anche qui, in un certo intervallo di frequenze, il vettore d'onda κ diviene immaginario, e appaiono i modi evanescenti.

L'uso di fotoni, però, presenta alcuni vantaggi, rispetto a quello delle microonde: per esempio, il fotone dimostra un comportamento "individuale" diverso da quello presentato da un segnale elettromagnetico qualsiasi nel campo delle microonde. Inoltre anche la dispersione è molto più ridotta, quasi come nel caso di una particella.

Figura II-9.

Didascalia della Fig.II-9:

{Configurazione sperimentale di Berkeley.}

In Figura II.9 è schematizzato l'apparato sperimentale usato in questo caso.

Una coppia di elettroni viene generata attraverso un processo di riconversione spontanea provocato da un laser all'interno di un cristallo (KDP) di potassio-di-idrogeno-fosfato. I due elettroni sono generati contemporaneamente e mentre uno dei due viaggia liberamente in aria, l'altro viene fatto incidere su un supporto di materiale rifrangente, metà del quale è ricoperto da un multistrato composto di due sostanze con indice di rifrazione diverso. Ogni strato ha uno spessore pari a un quarto della lunghezza d'onda dei fotoni. Lo spessore totale è di $1.1\mu\text{m}$, e corrisponde ad un tempo di attraversamento $d/c = 3.6$ fs. La band-gap dovuta al multistrato si estende per un'intervallo di lunghezze d'onda che va da 600 a 800 nm, con un minimo dell'1% a 692 nm nella trasmissione. La faccia opposta è invece ricoperta di materiale antiriflessione. Spostando il supporto è possibile introdurre, o no, una zona di evanescenza sul percorso del fotone. I due fotoni vengono poi fatti ri-incrociare, attraverso alcuni specchi, in modo da farli passare contemporaneamente per un divisore di fascio al 50 %. Sulle uscite del divisore di fascio sono posti due rivelatori, che registrano una coincidenza se i due fotoni arrivano entro 500 ps l'uno dall'altro.

Quando i due elettroni arrivano simultaneamente all'interno del divisore di fascio, l'interferenza tra i due ha un effetto distruttivo, annullando così la coincidenza. Aumentando o diminuendo, attraverso un prisma mobile, il cammino di uno dei due elettroni è possibile stabilire quando i due attraversano contemporaneamente il divisore di fascio, o quale dei due arriva prima.

Introdotta quindi lo spessore di multistrato sul cammino di uno dei due elettroni, è possibile misurarne, in questo modo, l'anticipo o il ritardo che questo ha rispetto all'altro.

Figura II-10.

Didascalia della Fig.II-10:

{Profili dei conteggi di coincidenze con e senza la barriera riflettente (rispettivamente curva più in alto e curva più in basso). Come si può vedere la curva più alta mostra un anticipo di circa $1.1 (\pm 0.3)$ fs rispetto all'altra.}

In Figura II.10 è riportato il risultato ottenuto dai tre autori sia nel caso di presenza della "barriera", sia in sua assenza.

Si può dunque vedere che nel caso di presenza del multistrato, i fotoni che lo attraversano arrivano, in media, circa 1.1 fs prima degli altri. L'errore considerato dagli autori è di 0.3 fs. Ciò dimostra che il tempo impiegato da ogni singolo fotone ad attraversare la barriera è di circa 7 deviazioni standard più piccolo del tempo che lo stesso elettrone impiegherebbe per attraversare lo spazio da questa occupato, ma in sua assenza, alla velocità c .

Gli autori fanno notare inoltre che, in questo caso, poiché per quasi tutto l'intervallo della band-gap il coefficiente di trasmissione varia molto lentamente, mantenendosi quasi costante al variare dell'energia, non è possibile giustificare tale evento come apparente e dovuto all'attraversamento, preferenzialmente, di fotoni più energetici. Inoltre notiamo che tutti i fotoni

nell'aria viaggiano circa alla stessa velocità, molto prossima a quella della luce, indipendentemente dalla loro energia.

Gli stessi autori, però, sostengono la tesi opposta, in un articolo divulgativo apparso su *Scientific American* nell'Agosto del 1993.

II.3) Misure del gruppo di Firenze.

Pur operando anch'esso con microonde, il gruppo di Firenze riprende sia dal punto di vista dell'analisi teorica, che nella procedura sperimentale un'idea di Brillouin[*41], sviluppata in seguito da Stevens[*42, *43]. Secondo questi infatti, in un mezzo dispersivo, va considerata come velocità di propagazione di un segnale elettromagnetico la velocità di propagazione del fronte d'onda molto netto di un segnale a scalino, e non la sua velocità di gruppo.

Notiamo che, anche se un segnale del genere può essere anch'esso soluzione dell'equazione di Helmholtz, non esiste però un equivalente quantistico. La propagazione di un segnale del genere è, poi, molto più dispersiva di quella di altri tipi di segnali, ed è accompagnata sempre dall'apparire, dopo un certo intervallo di tempo, di alcuni precursori, formati dalle frequenze più alte.

Figura II-11.

Didascalia della Fig.II-11:

{Ritardi temporali in funzione della frequenza per una barriera di 15 cm di lunghezza. In figura sono pure riportate le curve teoriche di τ^s , τ_T^φ e τ_T^B .}

Tralasciamo dunque le analisi teoriche sull'argomento, ma prendiamo ugualmente in esame i loro dati sperimentali, anche perché in essi ci troviamo un confronto diretto con alcuni dei tempi precedentemente definiti nel primo capitolo.

La procedura usata assomiglia abbastanza a quella del gruppo di Enders e Nimtz nella prima delle loro misure riportate. Le guide d'onda sono in questo caso rispettivamente: di banda *X* quella esterna e di banda *P* quella interna (per le dimensioni vedere ref. [*44]). In una prima serie di misure, un segnale a scalino, nell'intervallo di frequenze 9.4, 9.7 GHz viene fornito da un klystron, mentre il segnale trasmesso viene mandato ad un oscilloscopio ad alta risoluzione per la misura dei ritardi di fase e dell'attenuazione del segnale.

I risultati dei ritardi di fase sono corretti dagli autori mediante la sottrazione del ritardo corrispondente alla misura fatta senza la guida di banda *P*.

In Figura II.11 sono riportati i valori dei ritardi di fase misurati in funzione delle frequenze, insieme con le curve teoriche di τ^s , τ_T^φ e τ_T^B . Vediamo, che anche se nessuna delle curve riproduce esattamente i dati sperimentali, quella del *phase time* sembra si avvicini abbastanza ai dati.

Figura II-12.

Didascalia della Fig.II-12:

{Come per la Figura II.11, ma per $L = 10$ cm.}

La Figura II.12 si riferisce, invece, al caso di $L = 10$ cm. In questo caso però i punti sperimentali ricadono tra la curva relativa a τ_T^B e quella del *phase time*, mentre τ^S rimane inadeguato. Gli autori attribuiscono tale comportamento alla giunzione tra le due guide, infatti, a quanto pare, non viene usata nessuna tecnica di calibrazione del sistema. L'effetto aumenterebbe, secondo gli autori, al diminuire della lunghezza della barriera.

II.4) Conclusioni.

Come abbiamo visto, il problema posto all'inizio, di quanto tempo impieghi una particella ad attraversare una zona classicamente proibita, benché sostanzialmente risolto, rimane ancora controverso.

Se da un lato infatti esiste una evidenza sperimentale di gran lunga a favore della definizione di *phase time*, dall'altro questa stessa definizione, e gli stessi risultati sperimentali, portano a dover accettare l'insorgere di velocità di gruppo maggiori di quella della luce nel vuoto, a causa di quello che Olkhovsky e Recami[5] hanno chiamato "effetto Hartman".

Va comunque notato che, l'apparizione di velocità di gruppo Superluminali o addirittura *negative*, nell'ottica classica, non è un fenomeno nuovo, e fu anche questo studiato ed osservato sperimentalmente in lavori[45*,47*] che solo di recente stanno richiamando l'attenzione che meritavano. Infatti, come sappiamo, in un mezzo dispersivo lineare, non assorbente:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n(\omega) + \omega n'(\omega)} ,$$

e, in regioni forte dispersione anomala (in prossimità di risonanze), la velocità di gruppo può eccedere c o, come già detto, divenire negativa. È comunque dimostrato, però, che in questi casi la velocità di gruppo perde di validità fisica e nessun segnale può in effetti essere trasportato dal mezzo a velocità maggiore di c [si vedano anche il Cap.7 del *Classical Electrodynamics* del Jackson, o il Cap.3 del Sommerfeld].

In tal caso, inoltre, il fenomeno è facilmente spiegato attraverso un reshaping dell'impulso, che subisce un'attenuazione delle componenti meno energetiche e più lente. Il segnale uscente sembra quindi viaggiare a velocità apparentemente maggiori di quella a cui hanno realmente viaggiato le sue componenti più energetiche.

Nel tunnelling, però, abbiamo visto che (sia per le particelle, sia nel caso elettromagnetico) possiamo sempre metterci in condizioni da evitare effetti dovuti ad eventuali reshaping, o alla trasmissione di particelle già inizialmente più veloci.

Ciò è anche confermato sperimentalmente dal fatto che, come abbiamo visto soprattutto nelle misure di Enders e Nimtz, la forma dei segnali rimane inalterata.

Notiamo però che il processo di attraversamento della barriera, da parte di una particella, è comunque un processo statistico, nel senso che non possiamo mai sapere *a priori* quale particella attraversa la barriera. Inoltre, l'apparire di velocità Superluminali si ha proprio quando la probabilità associata a tale evento è molto bassa.

Secondo alcuni autori, quindi, una giustificazione della violazione del principio di causalità potrebbe essere che tale fenomeno, in quanto non controllabile, non può essere usato per trasmettere alcuna informazione.

In quest'ottica si inserisce il tipo di giustificazione che portano Steinberg et al.[10]. Secondo questi ultimi, nei processi di tunnelling in questione (quelli Superluminali), i relativi tempi di attraversamento andrebbero visti come “*valori deboli*” della misura. Il concetto di *valore debole*, o *misura debole*, è stato introdotto nel 1988 da Aharonov, Albert e Vaidman[49*, 50*], partendo dalla teoria “classica” della misura di von Neumann[51*].

Secondo i due autori quando facciamo una misura, su di un sottoinsieme con bassa probabilità associata (come quello delle particelle trasmesse), e questo sottoinsieme proviene da un insieme su cui è stata effettuata una “*misura debole*” (una misura cioè con una grossa indeterminazione, che lasci lo stato del sistema quasi imperturbato), è possibile ottenere come risultato della misura sul sottoinsieme, un valore completamente diverso da tutti gli autovalori accessibili al sistema. Tale valore non sarebbe comunque un valore realmente assunto dal sistema.

Secondo altri autori, invece, le velocità Superluminali legate al tunnelling sarebbero proprio reali e quello che va reinterpretato è il principio di causalità.[46*] A quest'ultimo proposito, ricordiamo che la Relatività Speciale può essere estesa —senza variarne i consueti Postulati— in modo da inglobare i moti Superluminali; la “Relatività Estesa”[47*], in altre parole, include i tachioni senza sostanzialmente violare la Relatività di Einstein, ma solo estendendola al nuovo dominio di velocità. In particolare, si possono risolvere le questioni causali.[48*]

È anche utile ricordare che la stessa Relatività Estesa prevede per oggetti Superluminali, sulla base di semplici considerazioni geometrico-classiche, la transizione da velocità di gruppo positive a velocità negative (quando si “oltrepassi” la situazione di velocità infinita): si vedano le refs.[47*]. Dato che a velocità negative corrispondono tempi di transito negativi[29*], ciò diviene interessante alla luce di esperimenti meno recenti[42*] e più recenti[34-38].

Ringraziamenti.

Il presente lavoro si basa sulla Tesi di laurea di G.Privitera (“Tempi di Tunnelling”; Università di Catania, 1995), avente come relatori E.Recami e G.D.Maccarrone. Siamo molto grati, per stimolanti e utili discussioni, e per la collaborazione scientifica, a A.Agresti, M.Baldo, P.Barbero, R.Bonifacio, L.Bosi, G.Cavalleri, R.Chiao, G.Degli Antoni, F.Fontana, R.Garavaglia, A.Gigli Berzolari, H.Hernández, L.C.Kretly, J.-y.Lu, G.D.Maccarrone, G.Nimtz, A.Shaarawi, P.Saari, G.Salesi, A.M.Steinberg, M.T.Vasconcelos e A.K.Zaichenko.

Bibliografia

- [1] E.U. Condon: Rev. Mod. Phys. **3**, 43, (1931)
- [2] L.A. MacColl: Phys. Rev. **40**, 621, (1932)
- [3] V.S. Olkhovsky, E. Recami and A.I. Gerasimchuk: Nuovo Cimento A22 (1974) 263; E. Recami: “A time operator and the time–energy uncertainty relation”, in *The Uncertainty Principle and Foundations of Quantum Mechanics*, ed. by W.C.Price and S.S.Chissick (J.Wiley; London, 1977), p.21; E. Recami: “An operator for Time”, in *Proceedings of the Karpacz Winter School (Recent Developments in Relativistic QFT and its Application, vol. 2)*, ed. by W.Karwowski (Wroclaw Univ. Press; Wroclaw, 1976), p. 251, and refs. therein; V.S. Olkhovsky: Sov. J. Part. Nucl. 15 (1984) 130; Nukleonika 35 (1990) 99-144; “The study of nuclear reactions by their temporal properties”, in *Nuclear Reaction Mechanisms*, ed. by D.Seeliger and H.Kalka (World Scientific; Singapore, 1991), p.15.
- [4] S. Collins, D. Lowe, J.R. Barker: J. Phys. **C 20**, 6233, (1989); E.H. Hauge, J. A. Stovnen: Rev. Mod. Phys. **61**, 917 (1989); A.P. Jauho: “Tunneling times in heterosctructures: A critical review”, in *Hot Carriers in Semiconductor Nanostructures: Physics and Applications* (A.T.T. Company; 1992) pp.121-150.
- [5] V.S. Olkhovsky, E. Recami: Phys. Reports **214**, 339 (1992)
- [6] R. Landauer, Th. Martin: Rev. Mod. Phys. **66**, 217 (1994)
- [7] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands: *The Feynman lectures on Physics*, (Addison-Wesley; 1977), vol.2, pp.24-27
- [8] T.E. Hartman: J. Appl. Phys. **33**, 3427 (1962)
- [9] J.R. Fletcher: J. Phys. **C 18**, 155 (1985)
- [10] See for instance A.M. Steinberg: J. Physique-I **4**, 1813 (1994), and refs. therein; Phys. Rev. A52 (1995) 32-52. Cf. also K. Hauss and P. Busch: Phys. Lett. A185 (1994) 9-13.
- [11] E.H. Hauge, J.P. Falck, T.A. Fjeldly: Phys. Rev. **B 36**, 4203 (1987)
- [12] C.R. Leavens, G.C. Aers: Phys. Rev. **B 89**, 1202 (1989)
- [13] Th. Martin, R. Landauer: Phys. Rev. Lett. **49**, 1739 (1982)
- [14] M. Büttiker, R. Landauer: Phys. Rev. Lett. **49**, 1739 (1982)
- [15] M. Büttiker, R. Landauer: Phys. Scr. **32**, 429 (1985)
- [16] M. Büttiker, R. Landauer: I.B.M. J. Res. Dev. **30**, 451 (1986)
- [17] A.J. Baz’: Sov. J. Nucl. Phys. **4**, 182 (1967)
- [18] A.J. Baz’: Sov. J. Nucl. Phys. **5**, 161 (1967)
- [19] V.E. Rybachenko: Sov. J. Nucl. Phys. **5**, 635 (1967)
- [20] J.J. Sakurai: *Meccanica Quantistica Moderna*, (Zanichelli, 1990) pp.75-77
- [21] M. Büttiker: Phys. Rev. **B 27**, 6178 (1983)
- [22] J.P. Falck, E.H. Hauge: Phys. Rev. **B 38**, 3287 (1988)
- [23] D. Sokolovski, L.M. Baskin: Phys. Rev. **A 36**, 4604 (1987)
- [24] P. Hänggi: In *Lectures on Path Integration* (World Scientific; London, 1991), pp.352
- [25] P. Sokolovski, J.N.L. Connor: Phys. Rev. **A47**, 4667 (1993). See also H.A.Fertig: Phys. Rev. Lett. 65 (1990) 2321; Phys. Rev. B47 (1993) 1346.
- [26] C.R. Leavens, G.C. Aers: In *Scanning Tunneling Microscopy – III*, ed. by R. Wiesedanger, H.J. Güntherodt (Springer; New York, 1993) pp. 105

- [27] F.T. Smith: Phys. Rev. **118**, 349 (1960)
- [28] V.S. Olkhovsky, E. Recami, A.K. Zaichenko: Sol. State Com. **89**, 31 (1994)
- [29] V.S. Olkhovsky, R. Recami, F. Raciti, A.K. Zaichenko: J. Phys. **5**, 1351 (1995)
- [30] W. Jaworski, D.M. Wordlawd: Phys. Rev. **A 37**, 2834 (1998)
- [31] C.R. Leavens: Solid State Com. **85**, 115 (1993)
- [32] R.S. Dumont, T.L. Marchioro: Phys. Rev. **A 47**, 85 (1993)
- [33] A.M. Steinberg, P.G. Kwiat, R.Y. Chiao: Phys. Rev. Lett. **71**, 708 (1993)
- [34] A.Enders and G.Nimtz: J. de Physique-I 2 (1992) 1693; 3 (1993) 1089; Phys. Rev. B47 (1993) 9605; Phys. Rev. E48 (1993) 632; G.Nimtz, A.Enders and H.Spieker: J. de Physique-I 4 (1994) 1; W.Heitmann and G.Nimtz: Phys. Lett. A196 (1994) 154; G.Nimtz, A.Enders and H.Spieker: in *Wave and Particle in Light and Matter* (Proceedings of the Trani Workshop, Italy, Sept.1992), ed. by A.van der Merwe and A.Garuccio (Plenum; New York, in press); H.Aichmann and G.Nimtz, "Tunnelling of a FM-Signal: Mozart 40," submitted for pub.; G.Nimtz and W.Heitmann: Prog. Quant. Electr. 21 (1977) 81-108.
- [35] A.M.Steinberg, P.G.Kwiat and R.Y.Chiao: ref.[33]; R.Y.Chiao, P.G.Kwiat and A.M.Steinberger: Scientific American 269 (1993), issue no.2, p.38; A.M.Steinberg and R.Y.Chiao: Phys. Rev. A51 (1995) 3525-3528. Cf. also P.G.Kwiat, A.M.Steinberg, R.Y.Chiao, P.H.Eberhard and M.D. Petroff: Phys. Rev. A48 (1993) R867; E.L.Bolda, R.Y. Chiao and J.C. Garrison: Phys. Rev. A48 (1993) 3890; A.M.Steinberg: Phys. Rev. Lett. 74 (1995) 2405; R.Y.Chiao and A.M.Steinberg: "Tunneling times and superluminality", in *Progress in Optics*, vol.37 (1997), ed. by E.Wolf.
- [36] A.Ranfagni, P.Fabeni, G.P.Pazzi and D.Mugnai: Phys. Rev. E48 (1993) 1453.
- [37] Ch.Spielmann, R.Szipocs, A.Stingl and F.Krausz: Phys. Rev. Lett. 73 (1994) 2308.
- [38] Scientific American: an article in the Aug. 1993 issue; Nature: comment "Light faster than light?" by R.Landauer, Oct. 21, 1993; New Scientist: editorial "Faster than Einstein" at p.3, plus an article by J.Brown at p.26, April 1995.
- [39] Th. Martin and R. Landauer: Phys Rev. 45A (1992) 2611; R.Y.Chiao, P.G.Kwiat and A.M. Steinberg: Physica B175 (1991) 257; A. Ranfagni, D. Mugnai, P. Fabeni and G.P. Pazzi: Appl. Phys. Lett. 58 (1991) 774; and refs. therein. See also A.M.Steinberg: *Phys. Rev.* A52 (1995) 32.
- [40] A. Agresti, V.S. Olkhovsky and E. Recami: (to be submitted for pub.)
- [41] H.M. Brodowsky, W. Heitmann and G. Nimtz: "Comparison of experimental microwave tunnelling data with calculations based on Maxwell equations", preprint (University of Cologne; 20 Aug.1996) submitted to Elsevier Preprint.
- [42] A.P.L. Barbero, H. Hernández F., and E.Recami: (to be submitted for pub.).
- [*39] H.J. Eul, B. Schick: IEEE-MTT **39**, 724 (1991)
- [*40] L. Brillouin: *Waves Propagation and Group Velocity* (Academic Press; New York, 1960)
- [*41] K.W. H.Stevens: Europ. J. Phys. **1**, 98 (1980)
- [*42] K.W.H. Stevens: J. Phys. **C 16**, 3649 (1983)
- [*43] A. Ranfagni, D. Mugnai, P. Fabeni, G.P. Pazzi, G. Naletto, C. Sozzi: Physica **B175**, 283 (1991)
- [*44] C.G.B. Garret, D.E. McCumber: Phys. Rev. **A1**, 305 (1970)
- [*45] S. Chu, S. Wong: Phys. Rev. Lett. **49**, 1293 (1982)

- [*46] E.L. Bolda, R.Y. Chiao: Phys. Rev. **A 48**, 3890 (1993)
- [*47] A.M. Steinberg: ,
- [*48] A.M. Steinberg: ,
- [*49] Y.Aharonov,D.Z.Albert and L.Vaidman; Phys. Rev. Lett. 60 (1988) 1351; Y. Aharonov, L. Vaidman: Phys. Rev. **A 41**, 11 (1990)
- [*50] I.M. Duck, P.M. Stevenson, E.C.G. Sudarshan: Phys. Rev. **D 40**, 40 (1989)
- [*51] J. von Neumann: *Mathematical Fondation of Quantum Meccanics*, (Princeton Univ. Press, Princeton, 1983)
- [*52] R. Landauer: Nature **341**, 567 (1989)
- [*53] Ch. Spieldmann et al.: Phis. Rev. Lett. **73** , 2308
- [*54] A. Ranfagni, D. Mugnai, A. Agresti: Phis. Lett. **A 158**, 161 (1991)
- [*55] D. Mugnai, A. Ranfagni, R. Ruggeri, A. Agresti, E. Recami: Phis. Lett. **A 209**, 227 (1995)

- [41*] C.G.B. Garret, D.E. McCumber: Phys. Rev. **A1**, 305 (1970)
- [42*] S. Chu, S. Wong: Phys. Rev. Lett. **49**, 1293 (1982)
- [43*] Y.Aharonov,D.Z.Albert and L.Vaidman; Phys. Rev. Lett. 60 (1988) 1351; Y. Aharonov, L. Vaidman: Phys. Rev. **A 41**, 11 (1990)
- [44*] I.M. Duck, P.M. Stevenson, E.C.G. Sudarshan: Phys. Rev. **D 40**, 40 (1989)
- [45*] J. von Neumann: *Mathematical Fondation of Quantum Meccanics* (Princeton Univ. Press; Princeton, 1983)
- [46*] D. Mugnai, A. Ranfagni, R. Ruggeri, A. Agresti, E. Recami: Phis. Lett. **A 209**, 227 (1995)
- [47*] See, e.g., E. Recami: “Classical tachyons and possible applications,” Rivista Nuovo Cim. 9 (1986), issue no.6, pp.1-178, and refs. therein; E. Recami and W.A. Rodrigues Jr.: “A model theory for tachyons in two dimensions”, in *Gravitational Radiation and Relativity*, ed. by J.Weber and T.M.Karade (World Scient.; Singapore, 1985), pp.151-203.
- [48*] E.Recami: “Tachyon kinematics and causality”, Foundation of Physics 17 (1987) 239-296; “The Tolman ‘Anti-telephone’ paradox: Its solution by tachyon mechanics,” Lett. Nuovo Cimento 44 (1985) 587-593.